Esercizio 1066

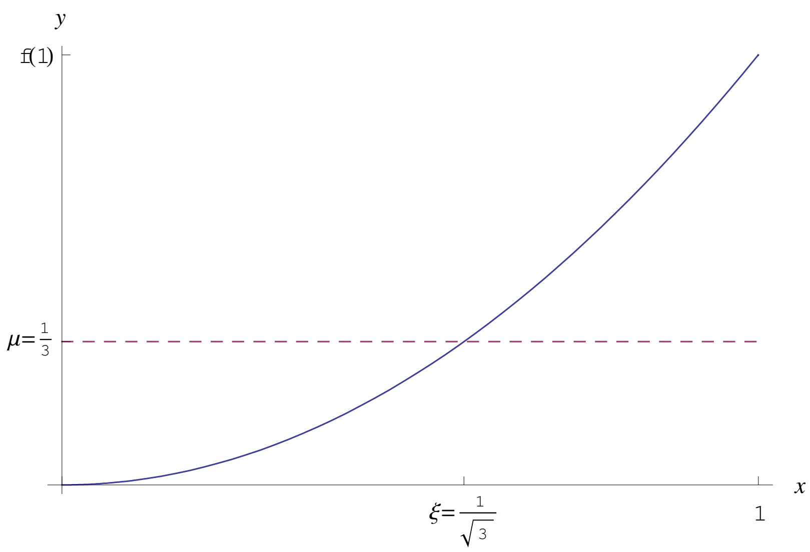
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo $[0, 1]$.
Soluzione
La media integrale è data da:

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Nel caso della funzione assegnata:

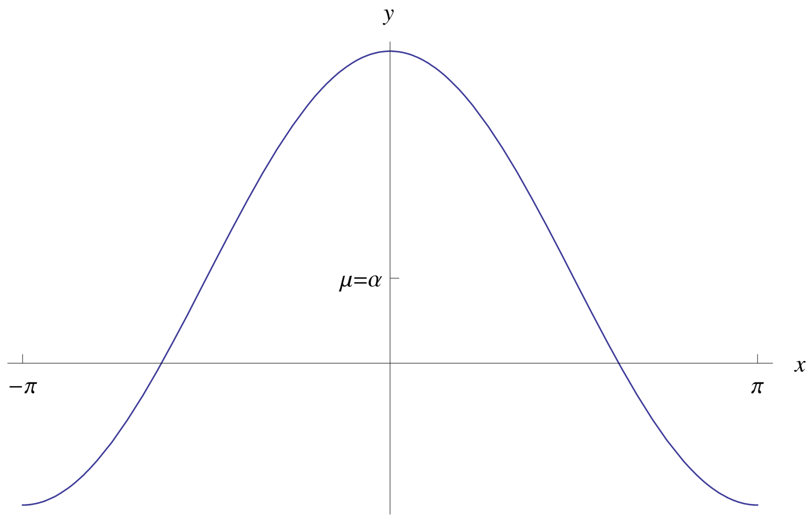
$$\mu = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \left. x^3 \right|_0^1 = \frac{1}{3}$$



Esercizio 1067

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = \alpha + \beta \cos x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.
Soluzione
La media integrale è:

$$\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\alpha + \beta \cos x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\left(\alpha \int_{-\pi}^{\pi} dx + \beta \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx\right)$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left[2\pi\alpha + \beta \left(\sin x\right)|_{\pi}^{-\pi}\right] = \alpha$$



Esercizio 1068

Determinare la media integrale della funzione $f(x) = \sin^2 x$ nell'intervallo $[0, \pi]$.
Soluzione
La media integrale è:

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin^2 x dx$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

da cui:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2x d\,(2x)\right]\end{aligned}$$

L'integrale a secondo membro è nullo:

$$\int_0^\pi \cos 2x d\,(2x) = \sin 2x|_0^\pi = 0$$

Perciò:

$$\mu = \frac{1}{2}$$

Esercizio 1069

Determinare la media integrale della funzione $f\,(x) = \sin^4 x$ nell'intervallo $[0,\pi]$.
Soluzione
La media integrale è:

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^4 x dx$$

Per calcolare l'integrale utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x,$$

da cui:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ &\Longrightarrow \sin^4 x = \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\pi - 2\int_0^\pi \cos 2x dx + \int_0^\pi \cos^2 2x dx\right]\end{aligned}$$

Il primo integrale a secondo membro è nullo (v. es. 1068), mentre il secondo

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos^2 2x dx &= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos 4x + 1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 4x dx + \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

giacchè

$$\int_0^\pi \cos kx dx = 0, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Perciò:

$$\mu = \frac{1}{4\pi}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

Esercizio 1070

Si consideri la famiglia di parabole ad un parametro:

$$y = ax - x^2, \qquad (a > 0) \tag{1}$$

Determinare l'area limitata dalla singola parabola della famiglia e dall'asse x.

***

Soluzione

Innanzitutto determiniamo le ascisse dei punti di intersezione della parabola (1) con l'asse x

$$ax - x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0, a$$

Quindi abbiamo i punti $(0,0)$ e $(0,a)$.
Come è noto, l'area richiesta è data dall'integrale definito:

$$\begin{aligned}S(a) &= \int_0^a \left(ax - x^2\right) dx = a\int_0^a x dx - \int_0^a x^2 dx \\ &= \frac{a}{2}\, x^2\Big|_0^a - \frac{1}{3}\, x^3\Big|_0^a \\ &= \frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \\ &= \frac{a^3}{3}\end{aligned}$$

Esercizio 1071

Si consideri la famiglia di curve logaritmiche:

$$y = \ln(ax), \qquad (a > 0) \tag{2}$$

Determinare l'area limitata dalla singola curva della famiglia, dall'asse x e dalle rette $x = \frac{1}{a}$, $x = \frac{e}{a}$.

***

Soluzione
L'area richiesta è data dall'integrale definito:

$$S(a) = \int_{1/a}^{e/a} \ln(ax)\, dx$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} S(a) &= x \cdot \ln(ax)\Big|_{1/a}^{e/a} - \int_{1/a}^{e/a} dx \\ &= \frac{e}{a} - x\Big|_{1/a}^{e/a} = \frac{e}{a} - \left(\frac{e}{a} - \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Quindi $S(a) = a^{-1}$, perciò l'area limitatata dalla curva (2) dall'asse x e dalle rette $x = \frac{1}{a}$, $x = \frac{e}{a}$, decresce al crescere del parametro a.

Esercizio 1072

Si consideri la famiglia di curve logaritmiche:

$$y = \ln\left(\frac{x}{a}\right), \qquad (a > 0) \tag{3}$$

Determinare l'area limitata dalla singola curva della famiglia, dall'asse x e dalle rette $x = a$, $x = ae$.

***

Soluzione
L'area richiesta è data dall'integrale definito:

$$S(a) = \int_{a}^{ae} \ln\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} S(a) &= x \cdot \ln\left(\frac{x}{a}\right)\Big|_{1/a}^{e/a} - \int_a^{ae} dx \\ &= ae - (ae - a) \\ &= a \end{aligned}$$

Quindi $S(a) = a$, perciò l'area limitatata dalla curva (3) dall'asse x e dalle rette $x = a$, $x = ae$, cresce linearmente al crescere del parametro a.

Esercizio 1073

Si consideri la famiglia di sinusoidi:

$$y = \sin(ax), \qquad (a > 0) \tag{4}$$

Determinare l'area limitata dalla singola curva della famiglia, dall'asse x e dalle rette $x = 0$, $x = \frac{\pi}{a}$.

***

Soluzione
L'area richiesta è data dall'integrale definito:

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^{\pi/a} \sin(ax)\, dx \\ &= -\frac{1}{a} \cos ax|_0^{\pi/a} \end{aligned}$$

Cioè:

$$S(a) = \frac{2}{a}$$

Esercizio 1075

Determinare l'area del segmento di parabola $y = x^2$ intercettato dalla retta $2x + y - 3 = 0$

***

Soluzione
Calcoliamo innanzitutto le coordinate cartesiane dei punti di intersezione della retta $r)$ $2x+y-3=0$ con la parabola $\gamma)$ $y=x^2$. Si tratta di risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} 2x+y-3=0 \\ y=x^2 \end{cases},$$

cioè:

$$x^2+2x-3=0 \Longleftrightarrow x=-3,1$$

Quindi abbiamo i punti: $(-3,0)$ e $(1,0)$. Ora poniamo:

$$f_1(x)=x^2,\ f_2(x)=-2x+3$$

È facile convincersi che:

$$\forall x \in (-3,1), \quad f_2(x) \geq f_1(x),$$

per cui l'area del segmento di parabola è

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{1} [f_2(x)-f_1(x)]\,dx = \int_{-3}^{1} \left(-x^2-2x+3\right) dx \\ &= -\frac{1}{3}\,x^3\Big|_{-3}^{1} - x^2\Big|_{-3}^{1} + 3\,x\Big|_{-3}^{1} \\ &= -\frac{1}{3}(1+27)-(1-9)+3(1+3) \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 1076

Calcolare l'area della superficie compresa tra la curva di Lorentz:

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

e la parabola $y=\frac{x^2}{2}$.

***

Soluzione
Calcoliamo innanzitutto le coordinate cartesiane dei punti di intersezione delle curve assegnate. Si tratta di risolvere il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y=\frac{1}{1+x^2} \\ y=\frac{x^2}{2} \end{cases},$$

cioè:

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

Poniamo $t = x^2$, per cui:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Longleftrightarrow t = -2, 1$$

La soluzione accettabile è $t = 1$, cioè $x = \pm 1$, quindi abbiamo i punti: $(-1, 0)$ e $(1, 0)$. Ora poniamo:

$$f_1(x) = 4 - \frac{2}{3}x^2,\ f_2(x) = \frac{x^2}{3}$$

È facile convincersi che:

$$\forall x \in (-2, 2),\quad f_1(x) \geq f_2(x),$$

per cui l'area del segmento di parabola è

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{2} [f_1(x) - f_2(x)]\, dx = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx \\ &= 4\, x|_{-2}^{2} - \frac{1}{3}\, x^2\Big|_{-2}^{2} \\ &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 1078

Calcolare l'area della superficie compresa tra le curve esponenziali $\gamma_1)$ $y = e^x$, $\gamma_2)$ $y = e^{-x}$ e la retta $x - 1 = 0$.

***

Soluzione
Poniamo:

$$f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{-x}$$

Evidentemente

$$\forall x \in (0, 1),\quad f_1(x) > f_2(x),$$

per cui l'area richiesta è

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^1 \left[f_1(x) - f_2(x)\right] dx = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx \\
&= 2\int_0^1 \sinh x dx = \cosh x|_0^1 \\
&= 2(\cosh 1 - 1) \\
&= \frac{e^2 - 2e + 1}{e}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1079

Calcolare l'area dell'ellisse di equazioni parametriche:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

***

Soluzione
L'area della superficie racchiusa da una curva piana la cui rappresentazione parametrica è:

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

e dalle rette di equazione $x = a$, $x = b$, è data da:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\, x'(t)\, dt,$$

essendo $t_{1,2}$ i valori del parametro t tali che $a = x(t_1)$, $b = y(t_2)$.
Osseviamo che per ragioni di simmetrica dell'ellisse (fig.), risulta:

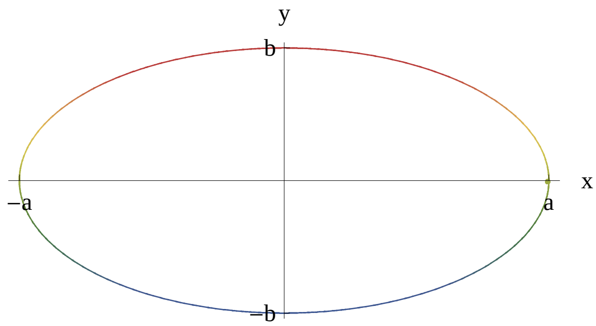
$$
\begin{aligned}
S &= 4ab\int_0^{\pi/2} y(t)\, x'(t)\, dt \\
&= ab\pi
\end{aligned}
$$

Esercizio 1080

Calcolare l'area limitata dall'asteroide (ipocicloide):

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \tag{5}$$

***



Soluzione
È conveniente utilizzare la rappresentazione parametrica dell'asteroide:

$$x(t) = a\cos^3 t, \ \ y = a\sin^3 t \ \ \text{ con } t \in [0, 2\pi]$$

Quindi

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, dt \\ &= 4\int_0^{\pi/2} y(t)\, x'(t)\, dt \\ &= \frac{3}{8}a^2\pi \end{aligned}$$

Esercizio 1081

Calcolare l'area limitata dall'asse x e da un arco della cicloide

$$x(t) = a(t - \sin t), \ y(t) = a(1 - \cos t) \tag{6}$$

***

Soluzione
L'area richiesta è

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos t^2\right) dt \\
&= 3\pi a^2
\end{aligned}
$$

Esercizio 1082

Calcolare l'area limitata dall'asse x e da un arco della trocoide

$$
x(t) = at - b\sin t, \; y(t) = a - b\cos t, \tag{7}
$$

essendo $0 < b \leq a$.

***

Soluzione
L'area richiesta è

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} (a - b\cos t)^2\, dt \\
&= \pi \left(2a^2 + b^2\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 1083

Calcolare l'area limitata dall'asse x e da un arco della cardiode

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a(2\cos t - \cos 2t) \\
y(t) &= a(2\sin t - \sin 2t)
\end{aligned} \tag{8}
$$

***

Soluzione
L'area richiesta è

$$S = \int_{0}^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, dt$$

Esplicitiamo l'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{0}^{2\pi} y(t)\, x'(t)\, dt &= \int_{0}^{2\pi} \left(-4a^2 \sin^2 t + 6a^2 \sin t \sin 2t - 2a^2 \sin^2 2t\right) dt \\ &= -6a^2\pi \end{aligned}$$

Il segno negativo discende che la funzione $y(t)$ assume valori negativi in $[\pi, 2\pi]$, per cui l'integrale va cambiato di segno:

$$S = 6a^2\pi$$

Esercizio 1084

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_{0}^{1} \frac{x^3}{x^8+1} dx$$

***

Soluzione

L'integrale può essere scritto come:

$$\int_{0}^{1} \frac{x^3}{(x^4)^2+1} dx$$

Ciò suggerisce il cambio di variabile $t = x^4$, per cui:

$$dt = 4x^3 dx$$

Gli estremi di integrazione in funzione della nuova variabile di integrazione diventano:

$$0 \leq x = t^{1/4} \leq 1,$$

cioè:

$$0 \leq t \leq 1$$

Quindi l'integrale in funzione di t diventa:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1}dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$
$$= \frac{1}{4}\left[\arctan t\right]_{t=0}^{t=1}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \frac{\pi}{16}$$

Esercizio 1085

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

***

Soluzione
Applichiamo il procedimento standard degli integrali semplici contenenti un trinomio di secondo grado. Scriviamo:

$$x^2+4x+5 = x^2+4x+4+1 = (x+2)^2+1$$

L'integrale si scrive:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int_0^1 \frac{d(x+2)}{1+(x+2)^2}$$
$$= \arctan(x+2)\big|_0^1$$
$$= \arctan 3 - \arctan 2$$

Per mettere il risultato in una forma più compatta, poniamo:

$$\alpha_1 = \arctan 3, \;\; \alpha_2 = \arctan 2$$

Per la nota formula trigonometrica:

$$\tan(\alpha_1-\alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}$$

Quindi:

$$\tan(\alpha_1-\alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2} = \frac{1}{7},$$

cioè:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \arctan\frac{1}{7} \Longleftrightarrow \arctan 3 - \arctan 2 = \arctan\frac{1}{7}$$

Si conclude che:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5} = \arctan\frac{1}{7}$$

Esercizio 1086

Calcolare il seguente integrale definito:

$$\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$$

***

Soluzione

Applichiamo il procedimento standard degli integrali semplici contenenti un trinomio di secondo grado. Scriviamo:

$$\begin{aligned}
x^2-3x+2 &= (x+k)^2+l = x^2+2kx+k^2+l \\
&\Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2k=-3 \\ k^2+l=2 \end{array}\right. \Longrightarrow k=-\frac{3}{2},\ \ l=-\frac{1}{4} \\
&\Longrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\left[(2x-3)^2-1\right]
\end{aligned}$$

L'integrale si scrive:

$$\begin{aligned}
\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2} &= 2\int_3^4 \frac{d\,(2x-3)}{\left[(2x-3)^2-1\right]} \\
&= \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_3^4 \\
&= \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 \\
&= \ln\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Esercizio 1087

Determinare l'area della superficie compresa tra la catenaria

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right), \tag{9}$$

l'asse y e la retta di equazione $y = \frac{a}{2e}\left(e^2+1\right)$.

***

Soluzione
Poniamo

$$f(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Tale funzione è pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse x, come mostrato in fig. , quindi se S è l'area richiesta, si ha:

$$\frac{S}{2} = x_0 y_0 - S_1, \tag{10}$$

essendo:

$$S_1 = \int_0^{x_0} f(x)\,dx, \quad y_0 = \frac{a}{2e}\left(e^2+1\right), \ \ y_0 = f(x_0) \tag{11}$$

Per determinare x_0 scriviamo:

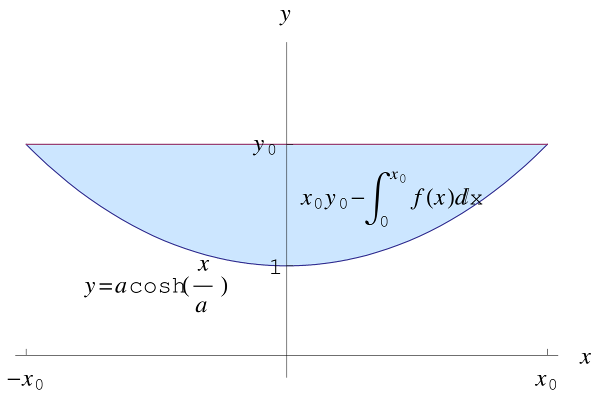
$$y_0 = a\frac{e+e^{-1}}{2} = a\cosh 1 \Longrightarrow y_0 = f(1) \Longrightarrow x_0 = a \tag{12}$$

Quindi l'integrale S_1 diventa:

$$\begin{aligned} S_1 &= a\int_0^a \cosh\frac{x}{a}dx = a^2\int_0^1 \cosh t dt \\ &= a^2 \sinh 1 \\ &= \frac{a^2}{2e}\left(e^2-1\right) \end{aligned}$$

Sostituendo il valore trovato per S_1 nella (10) troviamo l'area richiesta:

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \frac{a}{2e}\left(e^2+1\right) - \frac{a^2}{2e}\left(e^2-1\right) \\ &= \frac{a^2}{e} \\ &\Longrightarrow S = \frac{2a^2}{e} \end{aligned}$$



Esercizio 1088

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare l'area della superficie compresa tra le due parabole:

$$y = 6x - x^2, \quad y = x^2 - 2x \tag{13}$$

***

Soluzione
Determiniamo innanzitutto le coordinate dei punti di intersezione. A tale scopo risolviamo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

Abbiamo:

$$6x - x^2 = x^2 - 2x \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0, x = 4$$

Inoltre:

$$\forall x \in (0,4), \; f_1(x) > f_2(x),$$

dove:

$$f_1(x) \overset{def}{=} 6x - x^2, \quad f_2(x) \overset{def}{=} x^2 - 2x$$

Quindi, come risulta evidente dalla fig. () ,

$$S = \int\limits_0^4 \left[f_2\left(x\right) - f_1\left(x\right) \right] dx = \int\limits_0^4 \left(8x - 2x^2\right) dx$$

$$= 4 \left| x^2 \right._0^4 - \frac{2}{3} \left| x^3 \right._0^4$$

$$= \frac{64}{3}$$