

ESERCIZI DI ANALISI L-C, SOLUZIONI FASCICOLO IV

MASSIMO CICOGNANI

Esercizio 1. Calcolare la trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ di

$$f(x) = (x - i)^{-2}$$

e verificare il risultato con la formula di antitrasformazione.

Soluzione. La funzione f è sommabile su \mathbf{R} dal momento che è continua in \mathbf{R} e $|f(x)| \sim 1/|x|^2$ per $|x| \rightarrow \infty$. La trasformata si calcola quindi tramite l'integrale

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{(x - i)^2} dx.$$

Applichiamo il Teorema dei residui alla funzione di variabile complessa

$$g(z) = \frac{e^{-i\omega z}}{(z - i)^2}, \quad z = x + iy,$$

integrando sull'asse reale da $-R$ a R e su una semicirconfenza di centro l'origine e raggio R orientata positivamente se essa evolve nel semipiano superiore, negativamente se evolve nel semipiano inferiore. La scelta del semipiano dipende dal segno di ω e viene fatta in maniera tale che l'integrale sulla semicirconfenza vada a 0 per $R \rightarrow +\infty$. Poichè

$$|e^{-i\omega z}| = |e^{-i\omega x} e^{\omega y}| = e^{\omega y},$$

deve essere

$$\omega y < 0$$

quindi si sceglie il semipiano superiore per $\omega < 0$, il semipiano inferiore per $\omega > 0$. Per $\omega = 0$ la scelta del semipiano è indifferente, in ogni caso il valore della trasformata per $\omega = 0$ si deduce da quello per $\omega \neq 0$ dal momento che la trasformata di una funzione sommabile è una funzione continua di ω .

La funzione $g(z)$ ha l'unica singolarità per $z = i$, polo doppio. Il residuo vale

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z - i)^2 g(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} e^{-i\omega z} = \lim_{z \rightarrow i} -i\omega e^{-i\omega z} = -i\omega e^{\omega}.$$

Dunque la trasformata $\hat{f}(\omega)$ vale

$$2\pi i(-i\omega e^\omega) = 2\pi\omega e^\omega, \quad \omega < 0$$

mentre vale 0 per $\omega \geq 0$ dal momento che nel semipiano inferiore non ci sono singolarità. Riassumendo

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi\omega e^\omega u(-\omega)$$

dove u è il gradino unitario.

Osservato che $\hat{f}(\omega)$ è sommabile, possiamo antitrasformare attraverso l'integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega.$$

In ogni punto x si dovrà ottenere $f(x)$ dal momento che f è una funzione continua ovunque. Infatti

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} 2\pi\omega e^\omega u(-\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^0 \omega e^{\omega(ix+1)} d\omega = \\ &= \frac{1}{ix+1} [\omega e^{\omega(ix+1)}]_{-\infty}^0 - \frac{1}{ix+1} \int_{-\infty}^0 e^{\omega(ix+1)} d\omega = \\ &= -\frac{1}{(ix+1)^2} [e^{\omega(ix+1)}]_{-\infty}^0 = -\frac{1}{(ix+1)^2} = -\frac{1}{i^2} \frac{1}{(x-i)^2} = \frac{1}{(x-i)^2}. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x) = \frac{2}{\pi i(x-i)(x^2+1)}.$$

- Prima di calcolarla, spiegare perchè la trasformata $\hat{f}(\omega)$ è una funzione di classe C^1 e dire quanto valgono $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega)$ e $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega)$.
- Calcolare $\hat{f}(\omega)$ verificando le previsioni fatte.

Soluzione. La funzione $f(x)$ è continua in tutto \mathbf{R} e $|f(x)| \sim 2/\pi|x|^3$, $|xf(x)| \sim 2/\pi|x|^2$ per $|x| \rightarrow \infty$. Dunque, oltre ad f stessa, anche xf è sommabile. La trasformata è derivabile con derivata data da

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}(-ixf)(\omega).$$

Tale derivata è a sua volta una funzione continua come trasformata di una funzione sommabile e, sempre per lo stesso motivo, tende a 0 per $\omega \rightarrow \pm\infty$ come \hat{f} stessa.

Per calcolare $\hat{f}(\omega)$, applichiamo il metodo dei residui all'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2e^{-i\omega x}}{\pi i(x-i)(x^2+1)} dx$$

come nell'esercizio precedente. La funzione di variabile complessa

$$g(z) = \frac{2e^{-i\omega z}}{\pi i(z-i)(z^2+1)}, \quad z = x + iy,$$

ha un polo semplice per $z = -i$ ed un polo doppio per $z = i$.

Calcoliamo il residuo per $z = i$ utilizzando anche la scomposizione $(z-i)(z^2+1) = (z-i)^2(z+i)$:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} (z-i)^2 g(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \frac{2e^{-i\omega z}}{\pi i(z+i)} = \\ &= \frac{2}{\pi i} \lim_{z \rightarrow i} \frac{-i\omega z + \omega - 1}{(z+i)^2} e^{-i\omega z} = \frac{1}{2\pi i} (1 - 2\omega) e^\omega. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il residuo per $z = -i$:

$$\lim_{z \rightarrow -i} (z+i)g(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{2e^{-i\omega z}}{\pi i(z-i)^2} = -\frac{1}{2\pi i} e^{-\omega}.$$

Tenendo conto della scelta del semipiano in funzione del segno di ω già discussa nell'Esercizio 1 e dell'orientamento dei cammini, possiamo concludere

$$\hat{f}(\omega) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2\pi i} (1 - 2\omega) e^\omega = (1 - 2\omega) e^\omega, \quad \omega < 0,$$

$$\hat{f}(\omega) = -2\pi i \cdot \frac{-1}{2\pi i} e^{-\omega} = e^{-\omega}, \quad \omega \geq 0.$$

Con una unica espressione, si può scrivere

$$\hat{f}(\omega) = (1 - 2\omega u(-\omega)) e^{-|\omega|}$$

con u la funzione gradino unitario. Si verifica immediatamente che $\hat{f}(\omega) \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow \pm\infty$ e che \hat{f} è continua in tutti i punti $\omega \neq 0$. Per $\omega = 0$ la continuità segue da

$$\hat{f}(0+) = \hat{f}(0-) = 1 = \hat{f}(0).$$

La trasformata \hat{f} è derivabile per $\omega \neq 0$ con derivata data da

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -e^{-\omega}, \quad \omega > 0; \quad \frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = -(1 + 2\omega) e^\omega, \quad \omega < 0.$$

In particolare, anche $\hat{f}' \rightarrow 0$ per $\omega \rightarrow \pm\infty$ ed è continua per $\omega \neq 0$. Per $\omega = 0$ si ha

$$\hat{f}'(0+) = \hat{f}'(0-) = -1$$

quindi, dal Teorema del valor medio, il rapporto incrementale di \hat{f} per $\omega = 0$ ha limite da destra e da sinistra pari a -1 . Ne segue che \hat{f} è derivabile anche per $\omega = 0$ con $\hat{f}'(0) = -1$. Infine, da

$$\hat{f}'(0+) = \hat{f}'(0-) = -1 = \hat{f}'(0)$$

la funzione \hat{f}' risulta continua anche per $\omega = 0$.

Esercizio 3. (Viene riportata la risposta subito dopo ogni domanda)

Data la funzione $x(t) = (1 - |t|) \cdot 1_{[-1,1]}$

- Elencare tutte le proprietà che si possono prevedere per $\mathcal{F}(x)(\omega)$

Per ogni $k \geq 0$ vale $t^k x(t) \in L^1(\mathbf{R})$ quindi $\mathcal{F}x$ è derivabile infinite volte, $\mathcal{F}x$ e tutte le sue derivate convergono a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$. $x \in L^2(\mathbf{R})$ quindi anche $\mathcal{F}x \in L^2(\mathbf{R})$ e vale l'uguaglianza di Parseval. x è reale pari quindi $\mathcal{F}x$ sarà reale pari. Per altre proprietà si vedano i punti successivi.

- Calcolare $\mathcal{F}(x)(\omega)$

Per simmetria pari e per la definizione di $x(t)$ si ha

$$\mathcal{F}(x)(0) = 2 \int_0^1 (1-t) dt = 1$$

e, per $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x)(\omega) &= 2 \int_0^1 (1-t) \cos(\omega t) dt = \\ &= \frac{2}{\omega} [(1-t) \sin(\omega t)]_0^1 + \frac{2}{\omega} \int_0^1 \sin(\omega t) dt = \\ &= \frac{2}{\omega^2} [-\cos(\omega t)]_0^1 = \frac{2(1 - \cos \omega)}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Si osservi che dallo sviluppo del coseno di punto iniziale l'origine segue

$$\mathcal{F}(x)(\omega) = 1 - 2\frac{\omega^2}{4!} + 2\frac{\omega^4}{6!} - \dots$$

con raggio di convergenza pari a $+\infty$.

- Ragionando sulla formula di antitrasformazione, dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega (1 - \cos \omega)}{\omega^2} d\omega$$

Per simmetria e per antitrasformazione di una funzione sommabile e continua si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \omega(1 - \cos \omega)}{\omega^2} d\omega &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \omega(1 - \cos \omega)}{\omega^2} d\omega = \\ \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega} \frac{2(1 - \cos \omega)}{\omega^2} d\omega &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega \cdot 1} \mathcal{F}(x)(\omega) d\omega = \\ \frac{\pi}{2} x(1) &= \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

- Dedurre da una altra proprietà di x e $\mathcal{F}(x)$ il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos \omega)^2}{\omega^4} d\omega$$

Per simmetria e per l'uguaglianza di Parseval si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos \omega)^2}{\omega^4} d\omega &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1 - \cos \omega)^2}{\omega^4} d\omega = \\ \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(x)(\omega)|^2 d\omega &= \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \\ \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 (1 - |t|)^2 dt &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1 - t)^2 dt = \frac{\pi}{6} [(t - 1)^3]_0^1 = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

- Dire, senza calcolare ulteriori trasformate, quali valgono tra le proprietà

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x')(\omega) &= i\omega \mathcal{F}(x)(\omega) \\ \mathcal{F}(x'')(\omega) &= (i\omega)^2 \mathcal{F}(x)(\omega) \end{aligned}$$

per le usuali derivate.

La funzione $x(t)$ è assolutamente continua in \mathbf{R} quindi la prima proprietà vale per la usuale derivata. La usuale derivata seconda x'' vale 0 quasi ovunque (è nulla per ogni t tranne che per $t = -1, t = 0, t = 1$ dove non è definita) quindi la seconda proprietà non vale.

- Perché la usuale derivata di x e la derivata di x nel senso delle distribuzioni coincidono?

Proprio perchè la funzione $x(t)$ è assolutamente continua in \mathbf{R} (basterebbe l'assoluta continuità in ogni intervallo limitato).

- Determinata x' attraverso l'usuale calcolo di derivata, calcolare x'' nel senso delle distribuzioni applicando la definizione di derivata distribuzionale ad x'

Vale

$$x' = 1_{(-1,0)} - 1_{(0,1)}.$$

Applicando la definizione di derivata nel senso delle distribuzioni, per ogni funzione test φ si ha

$$\begin{aligned} \langle x'', \varphi \rangle &= -\langle x', \varphi' \rangle = -\int_{-1}^0 \varphi'(t) dt + \int_0^1 \varphi'(t) dt = \\ &= -[\varphi(t)]_{-1}^0 + [\varphi(t)]_0^1 = \varphi(-1) - 2\varphi(0) + \varphi(1) = \\ &= \langle \delta(t+1), \varphi(t) \rangle - 2\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle + \langle \delta(t-1), \varphi(t) \rangle. \end{aligned}$$

Quindi

$$x'' = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

come del resto era facilmente prevedibile dal grafico di x' .

- Verificare che nel senso delle distribuzioni vale

$$\mathcal{F}(x'')(\omega) = (i\omega)^2 \mathcal{F}(x)(\omega)$$

Da $x'' = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$ e dalle trasformate notevoli abbiamo

$$\mathcal{F}(x'') = e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega} = 2\cos\omega - 2 = 2(\cos\omega - 1).$$

D'altra parte, dal calcolo di $\mathcal{F}(x)$,

$$(i\omega)^2 \mathcal{F}(x)(\omega) = -\omega^2 \cdot \frac{2(1 - \cos\omega)}{\omega^2} = 2(\cos\omega - 1)$$

come volevasi verificare.

Esercizio 4. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Verificare la proprietà $\hat{f}' = i\omega\hat{f}$ nello spazio delle distribuzioni trasformabili.

Soluzione. Calcoliamo la trasformata di f . Per simmetria dispari di f si ha $\hat{f}(0) = 0$ e, per $\omega \neq 0$,

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= -2i \int_0^1 (x-1) \sin(\omega x) dx = \\ &= \frac{2i}{\omega} [(x-1) \cos(\omega x)]_0^1 - \frac{2i}{\omega} \int_0^1 \cos(\omega x) dx = \\ &= \frac{2i}{\omega} - \frac{2i}{\omega^2} [\sin(\omega x)]_0^1 = \frac{2i}{\omega} - \frac{2i \sin \omega}{\omega^2} = \frac{2i(\omega - \sin \omega)}{\omega^2}.\end{aligned}$$

Si osservi che \hat{f} è immaginaria pura dispari, derivabile infinite volte perchè si può sviluppare in serie di potenze di ω su tutto \mathbf{R} , il termine noto della serie è 0 in coerenza con $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$.

Calcoliamo la derivata nel senso delle distribuzioni. La derivata usuale, definita tranne che per $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$, coincide quasi ovunque con la funzione $1_{[-1,1]}$, quindi, osservando il salto di f in $x = 0$, la derivata nel senso delle distribuzioni sarà

$$f' = 1_{[-1,1]} - 2\delta.$$

Verifichiamolo dalla definizione:

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = \\ &= -\int_{-1}^0 (x+1) \varphi'(x) dx - \int_0^1 (x-1) \varphi'(x) dx = \\ &= -[(x+1) \varphi(x)]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - [(x-1) \varphi(x)]_0^1 + \int_0^1 \varphi(x) dx = \\ &= -2\varphi(0) + \int_{-1}^1 \varphi(x) dx = \langle -2\delta, \varphi \rangle + \langle 1_{[-1,1]}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Calcoliamo la trasformata di f' , ricordando per prima cosa quanto vale la trasformata di $1_{[-1,1]}$:

$$\hat{1}_{[-1,1]}(\omega) = 2 \int_0^1 \cos(\omega x) dx = \frac{2}{\omega} [\sin(\omega x)]_0^1 = \frac{2 \sin(\omega)}{\omega}.$$

Tenuto conto di questo e di $\hat{\delta} = 1$, abbiamo

$$\hat{f}' = -2 + \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} = \frac{2(\sin \omega - \omega)}{\omega}.$$

Confrontiamo infine con $i\omega\hat{f}$:

$$i\omega\hat{f} = i\omega \frac{2i(\omega - \sin \omega)}{\omega^2} = \frac{2(\sin \omega - \omega)}{\omega} = \hat{f}'$$

come volevasi verificare.

Esercizio 5. Per

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [0, 2] \end{cases}$$

verificare la proprietà $\hat{f}' = i\omega\hat{f}$ nello spazio delle distribuzioni trasformabili.

Soluzione. Calcoliamo la trasformata di f :

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^2 (x - 1)e^{-i\omega x} dx = \frac{i}{\omega} [(x - 1)e^{-i\omega x}]_0^2 - \frac{i}{\omega} \int_0^2 e^{-i\omega x} dx =$$

$$\frac{i(e^{-2i\omega} + 1)}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} [e^{-i\omega x}]_0^2 =$$

$$\frac{i(e^{-2i\omega} + 1)}{\omega} + \frac{e^{-2i\omega} - 1}{\omega^2} = \frac{i\omega e^{-2i\omega} + i\omega + e^{-2i\omega} - 1}{\omega^2}.$$

Si osservi che \hat{f} è derivabile infinite volte perchè si può sviluppare in serie di potenze di ω su tutto \mathbf{R} , il termine noto della serie è 0 in coerenza con $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^2 (x - 1) dx = 0$.

Calcoliamo la derivata nel senso delle distribuzioni. La derivata usuale, definita tranne che per $x = 0$ e $x = 2$, coincide quasi ovunque con la funzione $1_{[0,2]}$, quindi, osservando i salti di f in $x = 0$ e $x = 2$, la derivata nel senso delle distribuzioni sarà

$$f' = 1_{[0,2]} - \delta(x) - \delta(x - 2).$$

Verifichiamolo dalla definizione:

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_0^2 (x - 1)\varphi'(x) dx =$$

$$-[(x - 1)\varphi(x)]_0^2 + \int_0^2 \varphi(x) dx = -\varphi(2) - \varphi(0) + \int_0^2 \varphi(x) dx =$$

$$-\langle \delta(x - 2), \varphi(x) \rangle - \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle + \langle 1_{[0,2]}(x), \varphi(x) \rangle.$$

Calcoliamo la trasformata di f' , ricordando per prima cosa quanto vale la trasformata di $1_{[0,2]}$:

$$\hat{1}_{[0,2]}(\omega) = \int_0^2 e^{-i\omega x} dx = \frac{i}{\omega} [e^{-i\omega x}]_0^2 = \frac{i(e^{-2i\omega} - 1)}{\omega}.$$

Tenuto conto di questo e di $\mathcal{F}(\delta(x)) = 1$, $\mathcal{F}(\delta(x-2)) = e^{-2i\omega}$, abbiamo

$$\hat{f}' = -1 - e^{-2i\omega} + \frac{i(e^{-2i\omega} - 1)}{\omega} = \frac{-\omega - \omega e^{-2i\omega} + ie^{-2i\omega} - i}{\omega}.$$

Confrontiamo infine con $i\omega \hat{f}$:

$$i\omega \hat{f} = i\omega \frac{i\omega e^{-2i\omega} + i\omega + e^{-2i\omega} - 1}{\omega^2} = \frac{-\omega - \omega e^{-2i\omega} + ie^{-2i\omega} - i}{\omega} = \hat{f}'$$

come volevasi verificare.

Esercizio 6. (Viene riportata la risposta subito dopo ogni domanda)

Data la funzione $x(t) = (t+2) \cdot 1_{[-2,-1]} + 1_{(-1,1)} + (2-t)1_{(1,2]}$

• Elencare tutte le proprietà che si possono prevedere per $\mathcal{F}(x)(\omega)$ e per $\mathcal{F}(x')(\omega)$

Per ogni $k \geq 0$ vale $t^k x(t) \in L^1(\mathbf{R})$ quindi $\mathcal{F}x$ è derivabile infinite volte, $\mathcal{F}x$ e tutte le sue derivate convergono a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$. $x \in L^2(\mathbf{R})$ quindi anche $\mathcal{F}x \in L^2(\mathbf{R})$ e vale l'uguaglianza di Parseval. x è reale pari quindi $\mathcal{F}x$ sarà reale pari. Per altre proprietà si vedano i punti successivi.

• Dire perchè $\mathcal{F}(x')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(x)(\omega)$ vale per la usuale derivata.

Perchè la funzione $x(t)$ è sommabile ed assolutamente continua in \mathbf{R} .

• Calcolare $\mathcal{F}(x')(\omega)$ e dedurre $\mathcal{F}(x)(\omega) = 2\omega^{-2}(\cos \omega - \cos 2\omega)$

Si ha $x' = 1_{[-2,-1]} - 1_{[1,2]}$ per quasi ogni t . Per simmetria dispari

$$\mathcal{F}(x')(\omega) = 2i \int_1^2 \sin(\omega t) dt = -\frac{2i}{\omega} [\cos(\omega t)]_1^2 = \frac{2i(\cos \omega - \cos 2\omega)}{\omega}$$

da cui

$$\mathcal{F}(x)(\omega) = \frac{\mathcal{F}(x')(\omega)}{i\omega} = \frac{2(\cos \omega - \cos 2\omega)}{\omega^2}.$$

• Da $\mathcal{F}(x)(\omega)$ dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\omega - \cos \omega}{\omega^2} d\omega$$

Per simmetria e per la formula di antitrasformazione

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\omega - \cos \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2\omega - \cos \omega}{\omega^2} d\omega =$$

$$-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(x)(\omega) d\omega = -\frac{\pi}{2} x(0) = -\frac{\pi}{2}.$$

- Da $\mathcal{F}(x')(\omega)$ dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\cos 2\omega - \cos \omega)^2}{\omega^2} d\omega$$

Per simmetria e l'uguaglianza di Parseval

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\cos 2\omega - \cos \omega)^2}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4(\cos 2\omega - \cos \omega)^2}{\omega^2} d\omega =$$

$$\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}(x')(\omega)|^2 d\omega = \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2 dt =$$

$$\frac{\pi}{2} \int_1^2 dt = \frac{\pi}{2}.$$

- Perché la usuale derivata di x e la derivata di x nel senso delle distribuzioni coincidono?

Perché $x(t)$ è assolutamente continua in ogni intervallo limitato (lo è globalmente su \mathbf{R}).

- Determinata x' attraverso l'usuale calcolo di derivata, calcolare x'' nel senso delle distribuzioni applicando la definizione di derivata distribuzionale ad x'

La derivata seconda usuale vale 0 quasi ovunque. osservando i salti di x' si avrà

$$x'' = \delta(t+2) - \delta(t+1) - \delta(t-1) + \delta(t-2).$$

Verifichiamolo attraverso la definizione:

$$\langle x'', \varphi \rangle = -\langle x', \varphi' \rangle = - \int_{-2}^{-1} \varphi'(t) dt + \int_1^2 \varphi'(t) dt =$$

$$-[\varphi(t)]_{-2}^{-1} + [\varphi(t)]_1^2 = \varphi(-2) - \varphi(-1) - \varphi(1) + \varphi(2) =$$

$$\langle \delta(t+2), \varphi(t) \rangle - \langle \delta(t+1), \varphi(t) \rangle - \langle \delta(t-1), \varphi(t) \rangle + \langle \delta(t-2), \varphi(t) \rangle.$$

- Verificare che nel senso delle distribuzioni vale

$$\mathcal{F}(x'')(\omega) = (i\omega)^2 \mathcal{F}(x)(\omega)$$

Dalle trasformate notevoli segue

$$\mathcal{F}(x'') = e^{2i\omega} + e^{-2i\omega} - e^{i\omega} - e^{-i\omega} = 2(\cos 2\omega - \cos \omega).$$

Confrontando con $(i\omega)^2 \mathcal{F}(x)(\omega)$, abbiamo

$$(i\omega)^2 \mathcal{F}(x)(\omega) = -\omega^2 \frac{2(\cos \omega - \cos 2\omega)}{\omega^2} = 2(\cos 2\omega - \cos \omega) = \mathcal{F}(x'')$$

come volevasi verificare.

Esercizio 7. Sia $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(t) = (\pi - t)1_{[0,2\pi]}.$$

Calcolare f' e le trasformate \hat{f} , \hat{f}' per poi verificare la proprietà $\hat{f}' = i\omega \hat{f}$ nello spazio delle distribuzioni trasformabili.

Soluzione. Calcoliamo la trasformata di f :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_0^{2\pi} (\pi - t)e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} [(\pi - t)e^{-i\omega t}]_0^{2\pi} + \frac{i}{\omega} \int_0^{2\pi} e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{-i\pi(e^{-2\pi i\omega} + 1)}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} [e^{-i\omega t}]_0^{2\pi} = \\ &= \frac{-i\pi(e^{-2\pi i\omega} + 1)}{\omega} - \frac{e^{-2\pi i\omega} - 1}{\omega^2} = \frac{1 - i\pi\omega e^{-2\pi i\omega} - i\pi\omega - e^{-2\pi i\omega}}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Si osservi che \hat{f} è derivabile infinite volte perchè si può sviluppare in serie di potenze di ω su tutto \mathbf{R} , il termine noto della serie è 0 in coerenza con $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_0^{2\pi} (\pi - t)dt = 0$.

Calcoliamo la derivata nel senso delle distribuzioni. La derivata usuale, definita tranne che per $t = 0$ e $t = 2\pi$, coincide quasi ovunque con la funzione $-1_{[0,2\pi]}$, quindi, osservando i salti di f in $t = 0$ e $t = 2\pi$, la derivata nel senso delle distribuzioni sarà

$$f' = -1_{[0,2\pi]} + \pi\delta(t) + \pi\delta(t - 2\pi).$$

Verifichiamolo dalla definizione:

$$\begin{aligned}\langle f', \varphi \rangle &= -\langle f, \varphi' \rangle = -\int_0^{2\pi} (\pi - t)\varphi'(t)dt = \\ &= [(t - \pi)\varphi(t)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \varphi(t)dt = \pi\varphi(2\pi) + \pi\varphi(0) - \int_0^{2\pi} \varphi(t)dt = \\ &= \pi\langle \delta(t - 2\pi), \varphi(t) \rangle + \pi\langle \delta(t), \varphi(t) \rangle - \langle 1_{[0,2\pi]}(t), \varphi(t) \rangle.\end{aligned}$$

Calcoliamo la trasformata di f' , ricordando per prima cosa quanto vale la trasformata di $1_{[0,2\pi]}$:

$$\hat{1}_{[0,2\pi]}(\omega) = \int_0^{2\pi} e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} [e^{-i\omega t}]_0^{2\pi} = \frac{i(e^{-2\pi i\omega} - 1)}{\omega}.$$

Tenuto conto di questo e di $\mathcal{F}(\delta(t)) = 1$, $\mathcal{F}(\delta(t-2\pi)) = e^{-2\pi i\omega}$, abbiamo

$$\hat{f}' = \pi + \pi e^{-2\pi i\omega} - \frac{i(e^{-2\pi i\omega} - 1)}{\omega} = \frac{\pi\omega + \pi\omega e^{-2\pi i\omega} - ie^{-2\pi i\omega} + i}{\omega}.$$

Confrontiamo infine con $i\omega\hat{f}$:

$$\begin{aligned}i\omega\hat{f} &= i\omega \frac{1 - i\pi\omega e^{-2\pi i\omega} - i\pi\omega - e^{-2\pi i\omega}}{\omega^2} = \\ &= \frac{\pi\omega + \pi\omega e^{-2\pi i\omega} - ie^{-2\pi i\omega} + i}{\omega} = \hat{f}'\end{aligned}$$

come volevasi verificare.

Esercizio 8. (Viene riportata la risposta subito dopo ogni domanda)
Data la funzione

$$x(t) = (-t - 2) \cdot 1_{[-2,-1]} + t \cdot 1_{(-1,1)} + (2 - t) \cdot 1_{(1,2]}$$

- Elencare tutte le proprietà che si possono prevedere per $\mathcal{F}(x)(\omega)$ e per $\mathcal{F}(x')(\omega)$

Per ogni $k \geq 0$ vale $t^k x(t) \in L^1(\mathbf{R})$ quindi $\mathcal{F}x$ è derivabile infinite volte, $\mathcal{F}x$ e tutte le sue derivate convergono a zero per $\omega \rightarrow \pm\infty$. $x \in L^2(\mathbf{R})$ quindi anche $\mathcal{F}x \in L^2(\mathbf{R})$ e vale l'uguaglianza di Parseval. Tutte queste considerazioni sono valide anche per x' e $\mathcal{F}x'$. x è reale dispari quindi $\mathcal{F}x$ sarà immaginaria pura dispari. x' è reale pari quindi $\mathcal{F}x'$ sarà reale pari. Per altre proprietà si vedano i punti successivi.

- Dire perchè $\mathcal{F}(x')(\omega) = i\omega\mathcal{F}(x)(\omega)$ vale per la usuale derivata. Perchè $x, x' \in L^1(\mathbf{R})$ ed x è continua.

- Calcolare $\mathcal{F}(x')(\omega)$ e dedurne $\mathcal{F}(x)(\omega) = \frac{4 \sin \omega - 2 \sin(2\omega)}{i\omega^2}$

$$\mathcal{F}(x')(\omega) = - \int_{-2}^{-1} e^{-it\omega} dt + \int_{-1}^1 e^{it\omega} dt - \int_1^2 e^{-it\omega} dt = \frac{4 \sin \omega - 2 \sin(2\omega)}{\omega}.$$

Il risultato indicato segue da $\mathcal{F}(x)(\omega) = \frac{\mathcal{F}(x')(\omega)}{i\omega}$.

- Da $\mathcal{F}(x)(\omega)$ dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega (2 \sin \omega - \sin(2\omega))}{\omega^2} d\omega$$

Facendo comparire $\mathcal{F}x(\omega)$ ed applicando poi la formula di inversione

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega (2 \sin \omega - \sin(2\omega))}{\omega^2} d\omega &= \\ \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega} (4 \sin \omega - 2 \sin(2\omega))}{i\omega^2} d\omega &= \frac{\pi}{2} x(1) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- Da $\mathcal{F}(x')(\omega)$ dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{(2 \sin \omega - \sin(2\omega))^2}{\omega^2} d\omega$$

Utilizzando l'uguaglianza di Parseval

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{(2 \sin \omega - \sin(2\omega))^2}{\omega^2} d\omega &= \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}x'(\omega)|^2 d\omega = \\ \frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2 dt &= \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 dt = \pi. \end{aligned}$$

- Perché la usuale derivata di x e la derivata di x nel senso delle distribuzioni coincidono?

x è continua ed $x' \in L^1(\mathbf{R})$ (basterebbe x continua ed x' sommabile su ogni intervallo limitato).

- Determinata x' attraverso l'usuale calcolo di derivata, calcolare x'' nel senso delle distribuzioni applicando la definizione di derivata distribuzionale ad x'

$$\begin{aligned} \langle x'', \varphi \rangle &= -\langle x', \varphi' \rangle = \int_{-2}^{-1} \varphi'(t) dt - \int_{-1}^1 \varphi'(t) dt + \int_1^2 \varphi'(t) dt = \\ &= -\varphi(-2) + 2\varphi(-1) - 2\varphi(1) + \varphi(2) \end{aligned}$$

quindi, nel senso delle distribuzioni,

$$x''(t) = -\delta(t+2) + 2\delta(t+1) - 2\delta(t-1) + \delta(t-2).$$

- Verificare che nel senso delle distribuzioni vale

$$\mathcal{F}(x'')(\omega) = (i\omega)^2 \mathcal{F}(x)(\omega)$$

Dalle trasformate delle delta di Dirac abbiamo

$$\mathcal{F}x'' = -e^{2i\omega} + 2e^{i\omega} - 2e^{-i\omega} + e^{-2i\omega}$$

che è uguale a

$$4i \sin \omega - 2i \sin 2\omega = (i\omega)^2 \mathcal{F}x(\omega).$$

Esercizio 9. (Risposte subito dopo le domande) Data la funzione

$$x(t) = (t+1) \cdot 1_{[-1,0)} + (1-t) \cdot 1_{(0,1]}$$

- Calcolare $\mathcal{F}(x')(\omega)$ e dedurre $\mathcal{F}(x)(\omega) = \frac{2 - 2 \cos \omega}{\omega^2}$.

$$\mathcal{F}(x')(\omega) = \int_{-1}^0 e^{-it\omega} dt - \int_0^1 e^{-it\omega} dt = 2i \int_0^1 \sin(\omega t) dt = 2i \frac{1 - \cos \omega}{\omega}.$$

Il risultato indicato segue da $\mathcal{F}(x)(\omega) = \frac{\mathcal{F}(x')(\omega)}{i\omega}$ che vale per la usuale derivata perchè $x, x' \in L^1(\mathbf{R})$ ed x è continua.

- Da $\mathcal{F}(x)(\omega)$ dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} d\omega$$

Facendo comparire $\mathcal{F}x(\omega)$ ed applicando poi la formula di inversione

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2 - 2 \cos \omega}{\omega^2} d\omega = \frac{\pi}{2} x(0) = \frac{\pi}{2}.$$

- Da $\mathcal{F}(x')(\omega)$ dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos \omega)^2}{\omega^2} d\omega$$

Utilizzando l'uguaglianza di Parseval

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos \omega)^2}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}x'(\omega)|^2 d\omega =$$

$$\frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2 dt = \frac{\pi}{4} \int_{-1}^1 dt = \frac{\pi}{2}.$$

• Determinata x' attraverso l'usuale calcolo di derivata, calcolare x'' nel senso delle distribuzioni applicando la definizione di derivata distribuzionale ad x'

La usuale derivata prima e quella nel senso delle distribuzioni coincidono perchè x è continua ed $x' \in L^1(\mathbf{R})$ (basterebbe x continua ed x' sommabile su ogni intervallo limitato). Non vale la stessa cosa per la derivata seconda che dobbiamo calcolare nel senso delle distribuzioni.

$$\langle x'', \varphi \rangle = -\langle x', \varphi' \rangle = -\int_{-1}^0 \varphi'(t) dt + \int_0^1 \varphi'(t) dt = \varphi(-1) - 2\varphi(0) + \varphi(1)$$

quindi, nel senso delle distribuzioni,

$$x''(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1).$$

• Calcolare $\mathcal{F}(x'')(\omega)$ e dire quale relazione sussiste con $\mathcal{F}(x)(\omega)$.

Dalle trasformate delle delta di Dirac abbiamo

$$\mathcal{F}x'' = e^{i\omega} - 2 + e^{-i\omega}$$

che è uguale a

$$2 \cos \omega - 2 = (i\omega)^2 \mathcal{F}x(\omega).$$

Esercizio 10. (Risposte subito dopo le domande) Data la funzione

$$x(t) = (-t - 2) \cdot 1_{[-2,0)} + (t - 2) \cdot 1_{(0,2]}$$

• Calcolare $\mathcal{F}(x')(\omega)$ e dedurne $\mathcal{F}(x)(\omega) = \frac{2 \cos(2\omega) - 2}{\omega^2}$

$$\mathcal{F}(x')(\omega) = -\int_{-2}^0 e^{-it\omega} dt + \int_0^2 e^{-it\omega} dt = -2i \int_0^2 \sin(\omega t) dt = 2i \frac{\cos(2\omega) - 1}{\omega}.$$

Il risultato indicato segue da $\mathcal{F}(x)(\omega) = \frac{\mathcal{F}(x')(\omega)}{i\omega}$ che vale per la usuale derivata perchè $x, x' \in L^1(\mathbf{R})$ ed x è continua.

- Da $\mathcal{F}(x)(\omega)$ dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\omega)}{\omega^2} d\omega$$

Facendo comparire $\mathcal{F}x(\omega)$ ed applicando poi la formula di inversione

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(2\omega)}{\omega^2} d\omega = -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}x(\omega) d\omega = -\frac{\pi}{2} x(0) = \pi.$$

- Da $\mathcal{F}(x')(\omega)$ dedurre il valore di

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(2\omega))^2}{\omega^2} d\omega$$

Utilizzando l'uguaglianza di Parseval

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1 - \cos(2\omega))^2}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{8} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{F}x'(\omega)|^2 d\omega =$$

$$\frac{\pi}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} |x'(t)|^2 dt = \frac{\pi}{4} \int_{-2}^2 dt = \pi.$$

- Determinata x' attraverso l'usuale calcolo di derivata, calcolare x'' nel senso delle distribuzioni applicando la definizione di derivata distribuzionale ad x'

La usuale derivata prima e quella nel senso delle distribuzioni coincidono perchè x è continua ed $x' \in L^1(\mathbf{R})$ (basterebbe x continua ed x' sommabile su ogni intervallo limitato). Non vale la stessa cosa per la derivata seconda che dobbiamo calcolare nel senso delle distribuzioni.

$$\langle x'', \varphi \rangle = -\langle x', \varphi' \rangle = \int_{-2}^0 \varphi'(t) dt - \int_0^2 \varphi'(t) dt = -\varphi(-2) + 2\varphi(0) - \varphi(2)$$

quindi, nel senso delle distribuzioni,

$$x''(t) = -\delta(t+2) + 2\delta(t) - \delta(t-2).$$

- Calcolare $\mathcal{F}(x'')(\omega)$ e dire quale relazione sussiste con $\mathcal{F}(x)(\omega)$.

Dalle trasformate delle delta di Dirac abbiamo

$$\mathcal{F}x'' = -e^{2i\omega} + 2 - e^{-2i\omega}$$

che è uguale a

$$-2 \cos(2\omega) + 2 = (i\omega)^2 \mathcal{F}x(\omega).$$