Esercizio 35

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)$$

***

Risulta:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)=\infty-\infty$$

La forma indeterminata può essere rimossa determinando un "fattore razionalizzante". In generale, se

$$f(x)=\sqrt[N]{p(x)}\pm\sqrt[N]{q(x)},$$

il fattore razionalizzante è:

$$r(x)=\sum_{k=1}^{N}(\mp 1)^{k+1}\sqrt[N]{p(x)^{N-k}\,q(x)^{k-1}}$$

Per $f(x)=\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}$

$$\begin{aligned}r(x)&=\sum_{k=1}^{3}(+1)^{k+1}\sqrt[N]{(x-1)^{3-k}(2x)^{k-1}}\\&=\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}\end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)&=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x-1}-\sqrt[3]{2x}\right)\left[\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}\right]}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}+\sqrt[3]{2x(x-1)}+\sqrt[3]{4x^2}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt[3]{2-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{4}}\\&=-\frac{(+\infty)\cdot(1+0^+)}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}\\&=-(+\infty)\\&=-\infty\end{aligned}$$

Esercizio 37

Calcolare

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4 + 1} \right)$$

***

Abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt[4]{x^4 + 1} \right) = -\infty + \infty, \tag{1}$$

cioè il limite si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$. In questo caso l'indeterminazione si rimuove moltiplicando e dividendo per un fattore razionalizzante $r(x)$, che in generale si scrive:

$$r(x) = \sum_{k=1}^{N} (\mp 1)^{k+1} \sqrt[N]{p(x)^{N-k} q(x)^{k-1}}, \text{ per } f(x) = \sqrt[N]{p(x)} \pm \sqrt[N]{q(x)} \tag{2}$$

Per poter applicare la (2), scriviamo nella (1) $x = -\sqrt[4]{x^4}$ (prendiamo la radice con il segno $-$ poichè nel calcolo del limite è $x \to -\infty$). Quindi:

$$f(x) = x + \sqrt[4]{x^4 + 1} = \sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{x^4} \tag{3}$$

Con la $f(x)$ scritta come in (3) possiamo applicare la (2) per ottenere $r(x)$:

$$r(x) = \sqrt[4]{(x^4 + 1)^3} + \sqrt[4]{x^4 (x^4 + 1)^2} + \sqrt[4]{x^8 (x^4 + 1)} + \sqrt[4]{x^{12}} \tag{4}$$

Abbiamo:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) r(x)}{r(x)} \tag{5}$$

Sviluppiamo $f(x) r(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) r(x) &= \left(\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt[4]{x^4} \right) \left[\sqrt[4]{(x^4 + 1)^3} + \sqrt[4]{x^4 (x^4 + 1)^2} + \sqrt[4]{x^8 (x^4 + 1)} + \sqrt[4]{x^{12}} \right] \\ &= \sqrt[4]{(x^4 + 1)^4} - \sqrt[4]{x^{16}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt[4]{(x^4 + 1)^4} - \sqrt[4]{x^{16}}}{r(x)} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4 + 1 - x^4}{r(x)} \\ &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{r(x)} \end{aligned} \tag{6}$$

Ma

$$\lim_{x\to-\infty} r(x) = +\infty,$$

per cui:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{r(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ \tag{7}$$

Esercizio 43

Determinare l'ordine dei seguenti infinitesimi (per $x \to 0$):

1. $f(x) = \frac{10^4 x}{x+1}$
2. $f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ (per $x \to 0^+$)
3. $f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$ (per $x \to 0^+$)
4. $f(x) = \sin x - \tan x$

***

Soluzione

1. Assumiamo in tutti gli esercizi, la funzione $u(x) = x$ come infinitesimo di riferimento.

$$\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{u(x)^\alpha} = 10^4 \lim_{x\to0} \frac{x^{1-\alpha}}{x+1} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = 1$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = 1$.

2. $f(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}{x^\alpha} &= \lim_{x\to0^+} \sqrt[n]{\frac{x+\sqrt[n]{x}}{x^{\alpha n}}} \\ &= \lim_{x\to0^+} \sqrt[n]{x^{1-\alpha n} + \sqrt[n]{x^{1-\alpha n^2}}} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{1}{n^2}$.
Alternativamente:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x}}}{x^\alpha} = \lim_{x\to0^+} \frac{\left(x + x^{1/n}\right)^{1/n}}{x^\alpha} \tag{8}$$

Ma nella (8) x è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x^{1/n}$, per cui

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\left(x + x^{1/n}\right)^{1/n}}{x^\alpha} = \lim_{x\to0^+} \frac{x^{1/n^2}}{x^\alpha} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{1}{n^2} \tag{9}$$

Inoltre gli infinitesimi $\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}}$ e $\sqrt[n^2]{x}$ sono equivalenti, giacchè il limite (9) vale 1:

$$\sqrt[n]{x + \sqrt[n]{x}} \sim \sqrt[n^2]{x} \tag{10}$$

3. $f(x) = \sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \left(\sqrt[n]{x^{2-\alpha n}} - \sqrt[n]{x^{3-\alpha n}} \right) \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{2}{n}$$

Quindi $f(x)$ è un infinitesimo di ordine $\alpha = \frac{2}{n}$.
Alternativamente:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2/n} - x^{3/n}}{x^\alpha} \tag{11}$$

Ma $x^{3/n}$ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a $x^{2/n}$, per cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2/n} - x^{3/n}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{2/n}}{x^\alpha} \in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha = \frac{2}{n}$$

Inoltre gli infinitesimi $\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3}$ e $\sqrt[n]{x^2}$ sono equivalenti, giacchè il limite vale 1:

$$\sqrt[n]{x^2} - \sqrt[n]{x^3} \sim \sqrt[n]{x^2} \tag{12}$$

4. $f(x) = \sin x - \tan x$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^\alpha} &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x (\cos x - 1)}{x^\alpha \cos x} \\ &= -\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\cos x - 1}{x^{\alpha-1}} \right) \\ &\in \mathbb{R} - \{0\} \Longleftrightarrow \alpha - 1 = 2 \Longleftrightarrow \alpha = 3\end{aligned}$$

Esercizio 60

Calcolare:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$$

***

Soluzione
Abbiamo:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{\cos x (x - \sin x)}$$

Dividendo numeratore e denominatore per x^3:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x} \frac{1-\cos x}{x^2}}{\cos x \frac{x - \sin x}{x^3}}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{6},$$

per cui:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}}{\cos x\frac{x-\sin x}{x^3}}=3$$

Alternativamente (e in maniera più spedita):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x\,(1-\cos x)}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t=\cos x$, per cui:

$$\lim_{t\to 1}\frac{1-t^3}{t^2\,(1-t)}=\lim_{t\to 1}\frac{(1-t)\,(1+t+t^2)}{t^2\,(1-t)}=3$$

Esercizio 63

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}x^x$$

***

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0:

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=0^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+}x^x\right)=\lim_{x\to 0^+}(\ln x^x)=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0\cdot\infty$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 0^0 alla forma indeterminata $0\cdot\infty$. Per poter applicare la regola di De L'Hospital dobbiamo ricondurre quest'ultima alla $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}-\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}x=0^-$$

Quindi:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+}x^x\right)=0^-\Longrightarrow\lim_{x\to 0^+}x^x=e^{0^-}=1^-$$

Esercizio 64

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = 0\cdot\infty$$

Scriviamo:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$ alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\cos\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{H}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty} x\tan\frac{1}{x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $t=\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty} x\tan\frac{1}{x} = \lim_{t\to0^+}\frac{\tan t}{t} = 1,$$

per cui:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln\left(\cos\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 65

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to0^+} e^{1/x}\tan x$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to0^+} e^{1/x}\tan x = 0\cdot\infty$$

Scriviamo:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}\tan x = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$ alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, per cui possiamo applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\cot x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0^+}\left[e^{1/x}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)^2\right] = +\infty$$

per cui:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}\tan x = +\infty$$

Esercizio 66

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = \infty^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left(\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\left(\ln x^{1/x}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata ∞^0 alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Perciò possiamo applicare la regola di De L'Hospital

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x} = 0^+$$

Quindi:

$$\ln\left(\lim_{x\to +\infty} x^{1/x}\right) = 0^+ \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} x^{1/x} = e^{0^+} = 1^+$$

Esercizio 67

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{4+\ln x}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{4+\ln x}} = 0^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{4+\ln x}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln x^{\frac{2}{4+\ln x}}\right) = 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{4+\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 0^0 alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{4+\ln x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} 2\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 2$$

Quindi:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{4+\ln x}}\right) = 2 \Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{2}{4+\ln x}} = e^2$$

Esercizio 68

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0:

$$\lim_{x\to 0} x^{\sin x} = 0^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} x^{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\ln x^{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0}\sin x \ln x = 0\cdot\infty$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 0^0 alla forma indeterminata $0\cdot\infty$. Per poter applicare la regola di De L'Hospital è necessario convertire $0\cdot\infty$ in $\frac{0}{0}$ o in $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0}\sin x\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{\sin^2 x}{x} = 0$$

Quindi:

$$\ln\left(\lim_{x\to 0} x^{\sin x}\right) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

Esercizio 69

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$$

***

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0^0:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=0^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left(\lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right)=\lim_{x\to 1}\ln\left[(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right]=\lim_{x\to 1}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(1-x)\right]=0\cdot\infty$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 0^0 alla forma indeterminata $0\cdot\infty$. Per poter applicare la regola di De L'Hospital è necessario convertire $0\cdot\infty$ in $\frac{0}{0}$ o in $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(1-x)\right]\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}\\
&=\frac{\infty}{\infty}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{\pi}{2}\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}\\
&=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]\\
&=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x}\right]\cdot\lim_{x\to 1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)
\end{aligned}$$

Il secondo limite a secondo membro è:

$$\lim_{x\to 1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=1$$

Il primo limite:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-x}&=\frac{0}{0}\overset{H}{=}-\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\left[2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]\\
&=--\frac{2}{\pi}\lim_{x\to 1}\sin(\pi x)=0
\end{aligned}$$

Perciò:

$$\ln\left(\lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right) = \lim_{x\to 1}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\ln(1-x)\right] = 0$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)^{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)} = e^0 = 1$$

Esercizio 70

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(ax^2+bx+1\right)^{\frac{1}{ax^2+bx}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}\left(ax^2+bx+1\right)^{\frac{1}{ax^2+bx}} = 1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\begin{aligned}&\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(ax^2+bx+1\right)^{\frac{1}{ax^2+bx}}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\ln\left[\left(ax^2+bx+1\right)^{\frac{1}{ax^2+bx}}\right]\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(ax^2+bx+1\right)}{ax^2+bx}=\frac{0}{0}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(ax^2+bx+1\right)}{ax^2+bx} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{ax^2+bx+1} = 1$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}\left(ax^2+bx+1\right)^{\frac{1}{ax^2+bx}}\right] = 1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0}\left(ax^2+bx+1\right)^{\frac{1}{ax^2+bx}} = e^1 = e$$

Esercizio 71

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = 1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln \left(\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \right) = \lim_{x \to 1} \ln x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1-x} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{1-x} \overset{H}{=} - \lim_{x \to 1} \frac{1}{x} = -1$$

Perciò:

$$\ln \left(\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \right) = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 94

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4} \right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x \to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4} \right)^{\tan \frac{\pi x}{2}} = 1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left[\lim_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}\right] = \lim_{x\to 1}\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\left[\tan\frac{\pi x}{2}\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)}{\cot\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)}{\cot\frac{\pi x}{2}} \overset{H}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\left(\cot\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\sin^2\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = -1$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}\right] = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 1}\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 91

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}$$

***

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = \infty^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}\right] = \lim_{x\to 0^+}\ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln(\sin x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata ∞^0 alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln(\sin x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x} = -\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos^2 x} = -1$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}\right] = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 94

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}} = 1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left[\lim_{x\to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}\right] = \lim_{x\to 1} \ln\left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\left[\tan\frac{\pi x}{2}\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)\right]$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)}{\cot\frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\left(\tan\frac{\pi x}{4}\right)}{\cot\frac{\pi x}{2}} \overset{H}{=} -\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\left(\cot\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}}\cdot\sin^2\frac{\pi x}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot 1 = -1$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}}\right] = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 1} \left(\tan \frac{\pi x}{4}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 95

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = \infty^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}\right] = \lim_{x\to 0^+} \ln (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (\cot x)}{\ln (\sin x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata ∞^0 alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (\cot x)}{\ln (\sin x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos^2 x} = -1$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}}\right] = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln(\sin x)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 95

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \infty^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}\right] = \lim_{x\to 0^+} \ln (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (\cot x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata ∞^0 alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln (\cot x)}{\ln x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\tan x \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos x}\right) = -1$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}\right] = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 96

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata ∞^0:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \infty^0$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}\right] = \lim_{x\to 0^+}\ln(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata ∞^0 alla forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\cot x)}{\ln x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = -1$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}\right] = -1$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Esercizio 107

Calcolare il limite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$$

Soluzione
Abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1} &= \lim_{x\to 1}\frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}\\
&\overset{H}{=} -\lim_{x\to 1}\frac{\pi\sin\pi x}{2(x-1)}\\
&= -\frac{\pi}{2}\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{x-1}\\
&= \frac{0}{0}\overset{H}{=}-\frac{\pi^2}{x}\lim_{x\to 1}\cos\pi x\\
&= \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$

Esercizio 108

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$
\begin{aligned}
\ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right] &= \lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2}\\
&= \frac{0}{0}
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=-\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right]=-\frac{1}{2}$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Esercizio 109

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\infty-\infty$$

***

Soluzione

Il limite si presenta nella forma indeterminata 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=1^\infty$$

Calcoliamo il logaritmo del limite:

$$\begin{aligned}\ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right]&=\lim_{x\to 0}\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2}\\&=\frac{0}{0}\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ricondotto la forma indeterminata 1^∞ alla forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}}{x^2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=-\frac{1}{2}$$

Perciò:

$$\ln\left[\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}\right]=-\frac{1}{2}$$

Si conclude che:

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Esercizio 110

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\arctan x^2}{\arcsin x-x}$$

***

Soluzione
Il limite si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{\arcsin x - x} = \frac{0}{0}$$

Possiamo perciò applicare la regola di De L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \arctan x^2}{\arcsin x - x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x - \frac{2x}{1+x^4}}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} \\
&= 2 \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^4} \cdot \frac{x\left(1+x^4\right) - x}{1 - \sqrt{1-x^2}} \right) \\
&= 2 \lim_{x\to 0} \frac{x^4\sqrt{1-x^2}}{1+x^4} = 0
\end{aligned}$$