Esercizio 581

Calcolare gli integrali:

1. $\int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x} dx$

2. $\int x^n \sinh\left(x^{n+1} + \alpha\right) dx$

3. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

***

Soluzione

1. $\int \frac{3^{\tanh x}}{\cosh^2 x} dx = \int 3^{\tanh x} d\left(\tanh x\right) = \frac{3^{\tanh x}}{\ln 3} + C$

2. $\int x^n \sinh\left(x^{n+1} + \alpha\right) dx$. Poniamo:

$$y = x^{n+1} + \alpha$$

cosicchè:

$$dy = (n+1)\, x^n dx \Longrightarrow x^n dx = \frac{dy}{n+1}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I\left(y\right) &= \frac{1}{n+1} \int \sinh y dy \\ &= \frac{1}{n+1} \cosh y + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$I\left(x\right) = \frac{1}{n+1} \cosh\left(x^{n+1} + \alpha\right) + C$$

3. $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int e^{\arcsin x} d\left(\arcsin x\right) = e^{\arcsin x} + C$

Esercizio 583

Calcolare gli integrali:

1. $\int \frac{\sin\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]}{\sqrt{1+x^2}} dx$

2. $\int e^{-\cos x} \sin x dx$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

***

Soluzione

1. Osserviamo che:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arcsin h} x + C$$
Come è noto:
$$\operatorname{arcsin h} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$
Quindi:
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C \Longrightarrow \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = d\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$$
Perciò l'integrale può scriversi:
$$\int \sin\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right] d\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$$
$$= -\cos\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right] + C$$

2. $I(x) = \int e^{-\cos x} \sin x dx$. Poniamo:
$$y = -\cos x,$$
cosicchè:
$$dy = \sin x dx$$
L'integrale diventa:
$$I(y) = \int e^y dy = e^y + C$$
Ripristinando la variabile x:
$$I(x) = e^{-\cos x} + C$$

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int (\ln x)^{-1/2} d(\ln x) = 2\sqrt{\ln x} + C$

Esercizio 584

Calcolare gli integrali:

1. $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\ln x}{x} dx$
2. $\int \frac{dx}{ax^2+b} dx$
3. $\int \frac{x^2}{x^2+\alpha} dx$

***

Soluzione

1. $I(x) = \int \frac{\sqrt[4]{x}+\ln x}{x} dx$. Procediamo per decomposizione:

$$I(x) = \underbrace{\int \frac{\sqrt[4]{x}}{x} dx}_{=I_1(x)} + \underbrace{\int \frac{\ln x}{x} dx}_{=I_2(x)}$$
$$I_1(x) = 4\sqrt[4]{x} + C_1$$
$$I_2(x) = \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \ln^2 x + C_2$$

Quindi:

$$I(x) = 4\sqrt[4]{x} + \frac{1}{2} \ln x^2 + C,$$

avendo incorporato le costanti C_1, C_2 nell'unica costante di integrazione C.

2.

$$\int \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{1+\frac{a}{b}x^2} = \frac{1}{b} \int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right) + C$$

3.

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+\alpha} = \int \frac{x^2+\alpha-\alpha}{x^2+\alpha} dx = \int \left(1 - \frac{\alpha}{x^2+\alpha}\right) dx$$
$$= x - \alpha \int \frac{dx}{x^2+\alpha}$$
$$= x - \sqrt{\alpha} \int \frac{d\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2}$$
$$= x - \sqrt{\alpha} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) + C$$

Esercizio 585

Calcolare gli integrali:

1. $\int \frac{x^2-3x+5}{x^2+9}dx$

2. $\int \frac{x^2dx}{x^2+\alpha}$

3. $\int \sin(a+bx)\cos(a+bx)\,dx$

***

Soluzione

1. $I(x) = \int \frac{x^2-3x+5}{x^2+9}dx$. Procediamo per decomposizione:

$$I(x) = \underbrace{\int \frac{x^2}{x^2+9}dx}_{=I_1(x)} - 3\underbrace{\int \frac{xdx}{x^2+9}}_{=I_2(x)} + 5\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+9}}_{=I_3(x)}$$

$$I_1(x) = \int \frac{x^2+9-9}{x^2+9}dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+9}\right)dx$$

$$= \int dx - \int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{9}} = x - 3\int \frac{d\left(\frac{x}{3}\right)}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = x - 3\arctan\frac{x}{3} + C_1$$

$$I_2(x) = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+9\right) + C_2$$

$$I_3(x) = \int \frac{dx}{x^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C_3$$

Quindi:

$$I(x) = x - \frac{4}{3}\arctan\frac{x}{3} - \frac{3}{2}\ln\left(x^2+9\right) + C,$$

avendo incorporato le costanti C_1, C_2, C_3 nell'unica costante di integrazione C.

2.

$$\int \frac{3x-4}{2x^2+5} = 3\underbrace{\int \frac{x}{2x^2+5}dx}_{=I_1(x)} - 4\underbrace{\int \frac{dx}{2x^2+5}}_{=I_2(x)}$$

$$I_1(x) = \frac{1}{4}\int \frac{d(2x^2+5)}{2x^2+5} = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+5\right) + C_1$$

$$I_2(x) = \int \frac{dx}{2x^2+5} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\frac{2}{5}x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + C_2$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{3}{4}\ln\left(x^2+9\right) - \frac{4}{\sqrt{10}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{5}}x\right) + C,$$

avendo incorporato le costanti C_1, C_2, C_3 nell'unica costante di integrazione C.

3. $I(x) = \int \sin(a+bx)\cos(a+bx)\,dx$. Poniamo

$$y = \sin(a+bx),$$

cosicchè:

$$dy = b\cos(a+bx)\,dx$$

Quindi:

$$I(y) = \frac{1}{b}\int y\,dy = \frac{1}{2b}y^2 + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = \frac{1}{2b}\sin^2(a+bx) + C$$

Esercizio 586

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare gli integrali:

1. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x\cos(\ln x)}dx$

2. $\int \frac{\cos(2\ln x)}{x}dx$

3. $\int \left(e^{2x}-1\right)e^x dx$

***

Soluzione

1. Poniamo:

$$y = \ln x, \tag{1}$$

cosicché:

$$\frac{dx}{x} = dy$$

Quindi:

$$I(y) = \int \frac{\sin y}{\cos y}dy = -\ln|\cos y| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$I(x) = -\ln|\cos\ln x| + C$$

2. Eseguiamo il cambio di variabile (1):

$$I\left(y\right)=\int\cos 2ydy=\frac{1}{2}\int\cos 2yd\left(2y\right)=\frac{1}{2}\sin 2y+C,$$

Ripristinando la variabile x:

$$I\left(x\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2\ln x\right)+C$$

3. $\displaystyle\int\left(e^{2x}-1\right)e^{x}dx=\int e^{3x}dx-\int e^{x}dx=\tfrac{1}{3}e^{3x}-e^{x}+C$