

Esercizio 645

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int (x^2 - 2x + 3) \ln x dx$

2. $I(x) = \int x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx$

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \ln x d \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \frac{dx}{x} \\ &= \int \left(\frac{x^2}{3} - x + 3 \right) dx = \frac{x^3}{9} - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right) \ln x - \left(\frac{x^3}{9} - \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) + C \\ &= \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + \frac{x^2}{2} (1 - 2 \ln x) + 3x (\ln x - 1) + C \end{aligned}$$

2. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) d \left(\frac{x^2}{2} \right) \\ &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \frac{1}{2} \int x^2 d \left[\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] \end{aligned}$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right] &= \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} \\ &= \frac{2}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

per cui:

$$I(x) = \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - J(x),$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \int \frac{x^2-1+1}{x^2-1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2-1} \right) dx \\ &= x + \int \frac{dx}{(x-1)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x-1)(x+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} \\ &= \frac{(A+B)x + A - B}{x^2-1} \\ &\iff \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \iff (A, B) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Perciò:

$$J(x) = x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + C_1$$

Sostituendo nell'espressione di $I(x)$:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{x^2}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + C \\ &= \frac{x^2-1}{2} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) + C \end{aligned}$$

Esercizio 646

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

2. $I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \int \ln^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + 2J(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{\ln^2 x}{x} + -\frac{2}{x} \ln x + \frac{2}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C \end{aligned}$$

2.

$$I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(\ln x) d(\ln x)$$

Poniamo $t = \ln x$:

$$I(t) = \int \ln t dt = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \ln x [\ln(\ln x) - 1] + C,$$

Esercizio 646

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

2. $I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = \int \ln^2 x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + \int \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x \frac{dx}{x} \\ &= -\frac{\ln^2 x}{x} + 2J(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{\ln x}{x^2} dx = \int \ln x d\left(-\frac{1}{x}\right) \\ &= -\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= -\frac{\ln^2 x}{x} + -\frac{2}{x} \ln x + \frac{2}{x} + C \\ &= -\frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C \end{aligned}$$

2.

$$I(x) = \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(\ln x) d(\ln x)$$

Poniamo $t = \ln x$:

$$I(t) = \int \ln t dt = t \ln t - \int dt = t \ln t - t + C$$

Ripristinando la variabile x

$$I(x) = \ln x [\ln(\ln x) - 1] + C,$$

Esercizio 647

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int x^2 \arctan 3x dx$

2. $I(x) = \int (\arcsin x)^2 dx$

Soluzione

1. Integriamo per parti:

$$I(x) = \int \arctan 3x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} \arctan 3x - J(x)?$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int \frac{x^3}{1+9x^2} dx = \int \left[\frac{x}{9} - \frac{x}{9(1+9x^2)} \right] dx \\ &= \frac{1}{9} \int x dx - \frac{1}{9} \int \frac{x dx}{1+9x^2} \\ &= \frac{1}{18} x^2 - \frac{1}{18 \cdot 9} \ln(1+9x^2) + C_1 \\ &= \frac{1}{18} \left[x^2 - \frac{1}{9} \ln(1+9x^2) \right] + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{x^3}{3} \arctan 3x - \frac{1}{18} \left[x^2 - \frac{1}{9} \ln(1+9x^2) \right] + C$$

2. Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \arcsin x,$$

cosicchè:

$$x = \sin t, \quad dx = \cos t dt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int t^2 \cos t dt$$

Integrando per parti:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int t^2 d(\sin t) = t^2 \sin t - 2 \int t \sin t dt \\ \int t \sin t dt &= \int t d(-\cos t) = -t \cos t + \int \cos t dt \\ &= -t \cos t + \sin t + C_1 \\ \implies I(t) &= (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$I(x) = \arcsin x \left(x \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} \right) - 2x + C$$

Esercizio 648

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int x \sin x \cos x dx$

2. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$

Soluzione

1.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int x d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) \right] \\ &= \frac{1}{4} (\sin 2x - 2x \cos 2x) + C \end{aligned}$$

2. Integriamo per parti:

$$I(x) = \int \arcsin x d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\arcsin x}{x} + J(x),$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx$$

Eseguiamo la sostituzione trigonometrica:

$$x = \sin t,$$

cosicchè:

$$\sqrt{1-x^2} = \cos t, \quad dx = \cos t dt$$

L'integrale diventa:

$$J(t) = \int \frac{dt}{\sin t},$$

ed è un integrale noto:

$$J(t) = \ln \left| \frac{1}{\sin t} - \cot t \right| + C_1$$

Ripristinando la variabile x :

$$\begin{aligned} J(x) &= \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \right| + C_1 \\ &= \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right| + C_1 \\ &= \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right| + C_1 \end{aligned}$$

$$I(x) = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln \left| \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \right| + C$$

Esercizio 649

Calcolare i seguenti integrali:

1. $I(x) = \int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

2. $I(x) = \int x \tan^2 2x dx$

Soluzione

1. Osserviamo che:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = -2\sqrt{1-x} + C,$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \arcsin \sqrt{x} d(-2\sqrt{1-x}) \\ &= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \sqrt{1-x} d(\arcsin \sqrt{x}) \\ &= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ &= -2\sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C \end{aligned}$$

2. Osserviamo che:

$$\int \tan^2 2x dx = \int \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 2x} - \int dx = \frac{1}{2} \tan 2x - x + C$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x d\left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) \\ &= x\left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) - \int \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} x \tan 2x - x^2 - \frac{1}{2} \int \tan 2x dx + \frac{x^2}{2} + C_1 \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned} \int \tan 2x dx &= \frac{1}{2} \int \tan 2x d(2x) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\cos 2x)}{\sin 2x} \\ &= \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C_1 \end{aligned}$$

Sviluppiamo il $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2x}},$$

donde:

$$\ln |\cos 2x| = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2x}} = -\frac{1}{2} \ln (1 + \tan^2 2x)$$

Quindi l'integrale è:

$$I(x) = \frac{x}{2} \tan 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \int \tan 2x dx + C$$

Esercizio 650

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare i seguenti integrali

$$\begin{aligned} &\int \frac{\sin^2 x}{e^x} dx \\ &\int e^{2x} \cos 3x dx \end{aligned}$$

Soluzione

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sin^2 x d(-e^{-x}) \\ &= -e^{-x} \sin^2 x + J(x), \end{aligned} \tag{1}$$

essendo:

$$\begin{aligned} J(x) &= \int e^{-x} \sin 2x dx = \int e^{-x} d\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) \\ &= -\frac{e^{-x}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x dx \end{aligned} \quad (2)$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int e^{-x} \cos 2x dx = \int e^{-x} d\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x + \frac{1}{2} J(x) \end{aligned} \quad (3)$$

Sostituendo nella (2):

$$J(x) = -\frac{e^{-x}}{2} \cos 2x - \frac{e^{-x}}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} J(x)$$

per cui:

$$J(x) = -\frac{e^{-x}}{5} (2 \cos 2x + \sin 2x) + C_1$$

Quindi:

$$\begin{aligned} I(x) &= -e^{-x} \sin^2 x - \frac{e^{-x}}{5} (2 \cos 2x + \sin 2x) + C \\ &= -\frac{e^{-x}}{2} (1 - \cos 2x) - \frac{e^{-x}}{5} (2 \cos 2x + \sin 2x) + C \\ &= \frac{e^{-x}}{10} (\cos 2x - 2 \sin 2x - 5) + C \end{aligned}$$

Anzichè procedere per parti, scriviamo:

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = Ae^{2x} \cos 3x + Be^{2x} \sin 3x \quad (4)$$

Derivando primo e secondo membro rispetto a x :

$$\begin{aligned} e^{2x} \cos 3x &= \frac{d}{dx} (Ae^{2x} \cos 3x + Be^{2x} \sin 3x) \\ &= e^{2x} (2A + 3B) \cos 3x + (-3A + 2B) e^{2x} \sin 3x \end{aligned} \quad (5)$$

La (5) è verificata se e solo se:

$$\begin{cases} 2A + 3B = 1 \\ -3A + 2B = 0 \end{cases} \implies A = \frac{2}{13}, B = \frac{3}{13}$$

Quindi l'integrale è:

$$\int e^{2x} \cos 3x dx = \frac{2}{13} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{13} e^{2x} \sin 3x + C \quad (6)$$

Esercizio 651

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) dx$

2. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$

Soluzione

1. Anzichè integrare per parti, scriviamo:

$$\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) dx = Ae^{3x} \sin 4x + Be^{3x} \cos 4x + C \quad (7)$$

derivando:

$$\begin{aligned} & e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) \\ &= e^{3x} (3A - 4B) \sin 4x + e^{3x} (4A + 3B) \cos 4x \\ &\iff \begin{cases} 3A - 4B = 2 \\ 4A + 3B = -5 \end{cases} \implies A = -\frac{14}{25}, B = -\frac{23}{25} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int e^{3x} (2 \sin 4x - 5 \cos 4x) dx = \frac{e^{3x}}{25} (-14 \sin 4x - 23 \cos 4x) + C$$

2. Osserviamo che:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} e^{\tan x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \tan x e^{\tan x} d(\tan x)$$

Poniamo $t = \tan x$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = \int t e^t dt = \int t d(e^t) = t e^t - \int e^t dt = t e^t - e^t + C,$$

cioè:

$$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx = e^{\tan x} (\tan x - 1) + C$$

per cui:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x d\left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) \\ &= x \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) - \int \left(\frac{1}{2} \tan 2x - x\right) dx \\ &= \frac{1}{2} x \tan 2x - x^2 - \frac{1}{2} \int \tan 2x dx + \frac{x^2}{2} + C_1 \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned}\int \tan 2x dx &= \frac{1}{2} \int \tan 2x d(2x) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\cos 2x)}{\sin 2x} \\ &= \frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C_1\end{aligned}$$

Sviluppiamo il $\cos 2x$:

$$\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2x}},$$

donde:

$$\ln |\cos 2x| = \ln \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2x}} = -\frac{1}{2} \ln (1 + \tan^2 2x)$$

Quindi l'integrale è:

$$I(x) = \frac{x}{2} \tan 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{8} \int \tan 2x dx + C$$

Esercizio 652

Calcolare i seguenti integrali:

1. $\int e^x \ln(1 + e^x) dx$

2. $\int e^x \sin x dx$

Soluzione

1.

$$\begin{aligned}I(x) &= \int e^x \ln(1 + e^x) dx \\ &= \int \ln(1 + e^x) d(e^x) \\ &= e^x \ln(1 + e^x) - J(x),\end{aligned}$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x} dx = \int \frac{e^x}{1 + e^x} d(e^x)$$

Poniamo $t = e^x$:

$$\begin{aligned} J(t) &= \int \frac{t}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= t - \ln|t+1| \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$J(x) = e^x - \ln(1 + e^x) + C$$

E finalmente:

$$I(x) = (1 + e^x) \ln(1 + e^x) - e^x + C$$

2. Anziché integrare per parti, scriviamo:

$$\int e^x \sin x dx = Ae^x \sin x + Be^x \cos x + C$$

derivando:

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= e^x (A - B) \sin x + e^x (A + B) \cos x \\ \iff \begin{cases} A - B = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} &\implies A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C$$

Esercizio 653

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Dimostrare:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + C \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + C \end{aligned} \tag{8}$$

Soluzione

Per il primo integrale, ci serviamo della formula di duplicazione del seno $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, scrivendo $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$:

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Procedendo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= - \int \frac{d(\cos \frac{x}{2})}{\cos \frac{x}{2}} + \int \frac{d(\sin \frac{x}{2})}{\sin \frac{x}{2}} \\ &= - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| + \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| + C \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C\end{aligned}$$

Per ricondurlo alla prima delle (8) ci serviamo delle formule di bisezione:

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} - \cot x,$$

ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + C$$

Il secondo può essere ricondotto al primo scrivendo:

$$\cos x = \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

cosicché:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}$$

Poniamo $t = \frac{\pi}{2} - x$:

$$\int \frac{dx}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = - \int \frac{dt}{\sin t} = - \ln \left| \frac{1}{\sin t} - \cot t \right| + C$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{\cos x} = - \ln \left| \frac{1}{\cos x} - \tan x \right| + C$$

Per ricondurlo alla seconda delle (8) osserviamo che:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos x} - \tan x &= \frac{1}{\cos x} - \tan x \cdot \frac{\frac{1}{\cos x} + \tan x}{\frac{1}{\cos x} + \tan x} \\ &= \frac{1}{\cos x} + \tan x,\end{aligned}$$

da cui:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + C$$

Esercizio 654

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

2. $\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} dx$

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \arcsin x - \frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) \\ &= \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C\end{aligned}$$

2.

$$\int \frac{e^{2x}-e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{e^x-1}{e^x+1} d(e^x)$$

Poniamo $e^x = t$, quindi procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{t-1}{t+1} dt &= \int \frac{t+1-2}{t+1} dt = \int \left(1 - \frac{2}{t+1}\right) dt \\ &= t - 2 \ln |t+1| + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$I(x) = e^x - 2 \ln(e^x + 1) + C$$

Esercizio 655

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{xdx}{1-\sqrt{x+1}}$

2. $\int \frac{x-8}{\sqrt[3]{x-2}} dx$

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\frac{x}{1-\sqrt{x+1}} = \frac{x}{1-\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1+\sqrt{1+x}}{1+\sqrt{1+x}} = -\left(1+\sqrt{x+1}\right)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{1-\sqrt{x+1}} &= -\int \left(1+\sqrt{x+1}\right) dx \\ &= -\left(\int dx + \int \sqrt{x+1} dx\right) \\ &= -x - \frac{2}{3}(x+1)^3 \sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

2. Abbiamo:

$$\frac{x-8}{\sqrt[3]{x-2}} = \frac{(\sqrt[3]{x-2})(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)}{\sqrt[3]{x-2}} = \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4$$

Quindi procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned} \int \frac{x-8}{\sqrt[3]{x-2}} dx &= \int \left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right) dx \\ &= \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + 4x + C \end{aligned}$$

Esercizio 656

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$

2. $\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x} dx$

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, giacchè:

$$\frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}-1$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} dx &= \int (\sqrt{x}-1) dx \\ &= \int \sqrt{x} dx - \int dx \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} - x + C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+\sin 2x}{\cos^2 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{2\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2 \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= \tan x - 2 \ln |\cos x| + C\end{aligned}$$

Esercizio 657

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \cos x (\tan x + e^{\sin x}) dx$

2. $\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{1 + \sin x} dx$

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned}\int \cos x (\tan x + e^{\sin x}) dx &= \int \cos x \frac{\sin x}{\cos x} dx + \int \cos x e^{\sin x} dx \\ &= -\cos x + \int e^{\sin x} d(\sin x) \\ &= -\cos x + e^{\sin x} + C\end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché:

$$\frac{\sin x - \sin^3 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x (1 - \sin^2 x)}{1 + \sin x} = \sin x - \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x - \sin^3 x}{1 + \sin x} dx &= \int \sin x dx - \int \sin^2 x dx \\ &= -\cos x - \int \sin^2 x dx \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\begin{aligned} &\int \sin^2 x dx \\ \sin^2 x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \end{aligned}$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \left(\int dx - \int \cos 2x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) + C_1 \\ &= \frac{1}{4} (2x - \sin 2x) + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$\int \frac{\sin x - \sin^3 x}{1 + \sin x} dx = -\cos x - \frac{1}{4} (2x - \sin 2x)$$

Esercizio 659

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{x^3 + a^3}{x+a} dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}, \quad a \neq b$

Soluzione

1. Abbiamo:

$$\frac{x^3 + a^3}{x+a} = \frac{(x+a)(x^2 - ax + a^2)}{x+a} = x^2 - ax + a^2$$

Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - ax + a^2) dx &= \int x^2 dx - a \int x dx + a^2 \int dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + a^2x + C \end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché razionalizzando:

$$\frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}} = \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{a-b}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{x+b}}{a-b} dx &= \frac{1}{a-b} \left(\int \sqrt{x+a} dx - \int \sqrt{x+b} dx \right) \\ &= \frac{2}{3(a-b)} \left[\sqrt{(x+a)^3} - \sqrt{(x+b)^3} \right] + C \end{aligned}$$

Esercizio 660

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{x + (\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$

2. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione:

$$\begin{aligned} &\int \frac{x + (\arcsin x)^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int (\arcsin x)^3 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) + \int (\arcsin x)^3 d(\arcsin x) \\ &= -\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} (\arcsin x)^4 + C \end{aligned}$$

2. Procediamo per decomposizione, giacché:

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \frac{1+x-1}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx &= \int \sqrt{1+x} dx - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\ &= \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} - 2\sqrt{1+x} + C \\ &= 2\sqrt{1+x} (x-2) + C \end{aligned}$$

Esercizio 661

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx$

2. $\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Soluzione

1. Procediamo per decomposizione, poiché:

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 1 + \cos x$$

Quindi:

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx = \int dx + \int \cos x dx = x + \sin x + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{x},$$

cosicché:

$$x = t^2, dx = 2t dt$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{1 + e^t}{t} t dt \\ &= 2 \left(\int dt + \int e^t dt \right) \\ &= 2(t + e^t) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{1 + e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x} + e^{\sqrt{x}}) + C$$

Esercizio 665

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$
2. $\int \sqrt{e^x - 1} dx$

Soluzione

1. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \ln x,$$

cosicché:

$$dt = \frac{dx}{x}$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C,$$

ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{e^x - 1},$$

cosicché:

$$x = \ln(t^2 + 1), \quad dx = \frac{2t dt}{t^2 + 1}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int t \cdot \frac{2t dt}{t^2 + 1} = 2 \int \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} \\ &= 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = 2 \left(\int dt - \int \frac{dt}{t^2 + 1} \right) \\ &= 2(t - \arctan t) + C, \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x :

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx = 2(\sqrt{e^x - 1} - \arctan \sqrt{e^x - 1}) + C$$

Esercizio 666

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Soluzione

1. Scriviamo:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx = \int \sqrt{\sin x} \cos^2 x d(\sin x) \\ &= \int \sqrt{\sin x} (1 - \sin^2 x) d(\sin x) \end{aligned}$$

Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sin x$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \sqrt{t} dt - \int t^{5/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{7} t^{7/2} + C \\ &= \frac{2}{3} t \sqrt{t} - \frac{2}{7} t^3 \sqrt{t} + C, \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x :

$$\int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx = \frac{2}{21} \sin x \sqrt{\sin x} (7 - 3 \sin^2 x) + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \tan x,$$

cosicché:

$$1 + x^2 = \frac{1}{\cos^2 t}, \quad dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \cos t dt = \sin t + C$$

ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

Esercizio 667

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}}$
2. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

Soluzione

1. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{2x-1},$$

cosicché:

$$x = \frac{1}{2}(t^2 + 1), \quad dx = t dt$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \int \frac{t dt}{\frac{1}{2}(t^2 + 1)t} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= 2 \arctan t + C \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}} = 2 \arctan \sqrt{2x-1} + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$x = \sin^2 t,$$

cosicché:

$$dx = 2 \sin t \cos t dt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = 2 \int \sin^2 t dt,$$

chè è un integrale noto:

$$\int \sin^2 t dt = \frac{1}{2}(t - \sin t \cos t) + C_1$$

ripristinando la variabile x :

$$t = \arcsin \sqrt{x}, \quad \cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \sqrt{1-x} \implies \sin t \cos t = \sqrt{x(1-x)}$$

Quindi:

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx = \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)} + C$$

Esercizio 669

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

3. $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

Soluzione

1. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = 1 + e^x,$$

cosicché:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$$

ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \ln(e^x + 1) + C$$

2. Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = \sqrt{x},$$

cosicché:

$$dx = 2t dt$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= 2 \int \frac{t}{1+t} dt = \int \frac{1+t-1}{1+t} dt \\ &= 2 \left(\int dt - \int \frac{dt}{t+1} \right) \\ &= 2 (\ln |t| - \ln |t+1|) + C \\ &= 2 \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C, \end{aligned}$$

ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} = 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right| + C$$

3.

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$$

Procediamo per sostituzione, ponendo:

$$t = e^x,$$

cosicché:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \int \frac{dt}{1 + t^2} = \arctan t + C$$

ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \arctan e^x + C$$

Esercizio 673

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{2x^2 - x + 2}$

2. $\int \frac{dx}{2 + 4x - x^2}$

Soluzione

1. Scriviamo:

$$2x^2 - x + 2 = 2(x + k)^2 + l = 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l,$$

da cui:

$$\begin{cases} 4k = -1 \\ 2k^2 + l = 2 \end{cases} \implies k = -\frac{1}{4}, l = 2 - k^2 = \frac{15}{8}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} &= \int \frac{dx}{2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}} \\ &= \frac{8}{15} \int \frac{dx}{\left(\frac{4x-1}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1}\end{aligned}$$

Poniamo:

$$t = \frac{4x-1}{\sqrt{15}} \implies dx = \frac{\sqrt{15}}{4} dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \frac{2\sqrt{15}}{15} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \arctan t + C$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \arctan \frac{4x-1}{\sqrt{15}} + C$$

2. Scriviamo:

$$2 + 4x - x^2 = -(x+k)^2 + l = -x^2 - 2kx - k^2 + l,$$

da cui:

$$\begin{cases} -2k = 4 \\ -k^2 + l = 2 \end{cases} \implies k = -2, l = 6$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{2 + 4x - x^2} = \int \frac{dx}{6 - (x-2)^2}$$

Poniamo:

$$t = x - 2 \implies dx = dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \int \frac{dt}{6 - t^2}$$

L'integrale $\int \frac{dt}{6-t^2}$ è un integrale noto. Infatti:

$$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t+a}{t-a} \right| + C,$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t + \sqrt{6}}{t - \sqrt{6}} \right| + C$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{2 + 4x - x^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-2 + \sqrt{6}}{x-2 - \sqrt{6}} \right| + C$$

Esercizio 674

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare i seguenti integrali

1. $\int \frac{dx}{2x^2 - x + 2}$

2. $\int \frac{dx}{2 + 4x - x^2}$

Soluzione

1. Scriviamo:

$$2x^2 - x + 2 = 2(x + k)^2 + l = 2x^2 + 4kx + 2k^2 + l,$$

da cui:

$$\begin{cases} 4k = -1 \\ 2k^2 + l = 2 \end{cases} \implies k = -\frac{1}{4}, l = 2 - k^2 = \frac{15}{8}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} &= \int \frac{dx}{2\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{8}} \\ &= \frac{8}{15} \int \frac{dx}{\left(\frac{4x-1}{\sqrt{15}}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Poniamo:

$$t = \frac{4x - 1}{\sqrt{15}} \implies dx = \frac{\sqrt{15}}{4} dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \frac{2\sqrt{15}}{15} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \arctan t + C$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 3} = \frac{2\sqrt{15}}{15} \arctan \frac{4x - 1}{\sqrt{15}} + C$$

2. Scriviamo:

$$2 + 4x - x^2 = -(x + k)^2 + l = -x^2 - 2kx - k^2 + l,$$

da cui:

$$\begin{cases} -2k = 4 \\ -k^2 + l = 2 \end{cases} \implies k = -2, l = 6$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{2+4x-x^2} = \int \frac{dx}{6-(x-2)^2}$$

Poniamo:

$$t = x - 2 \implies dx = dt$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = \int \frac{dt}{6-t^2}$$

L'integrale $\int \frac{dt}{6-t^2}$ è un integrale noto. Infatti:

$$\int \frac{dt}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{t+a}{t-a} \right| + C,$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{t+\sqrt{6}}{t-\sqrt{6}} \right| + C$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{2+4x-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{x-2+\sqrt{6}}{x-2-\sqrt{6}} \right| + C$$