

## Esercizio 1131

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare l'integrabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

nell'intervallo  $A = [0, +\infty)$ .

### Soluzione

La funzione assegnata è continua su tutto  $\mathbb{R}$ . Si tratta di studiarne l'integrabilità nell'intervallo illimitato  $A = [0, +\infty)$ . Osserviamo inoltre che tale funzione è un'oscillazione sinusoidale involupata da  $1/x$  e  $-1/x$ , avendosi:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

L'andamento è riportato in fig. (1).

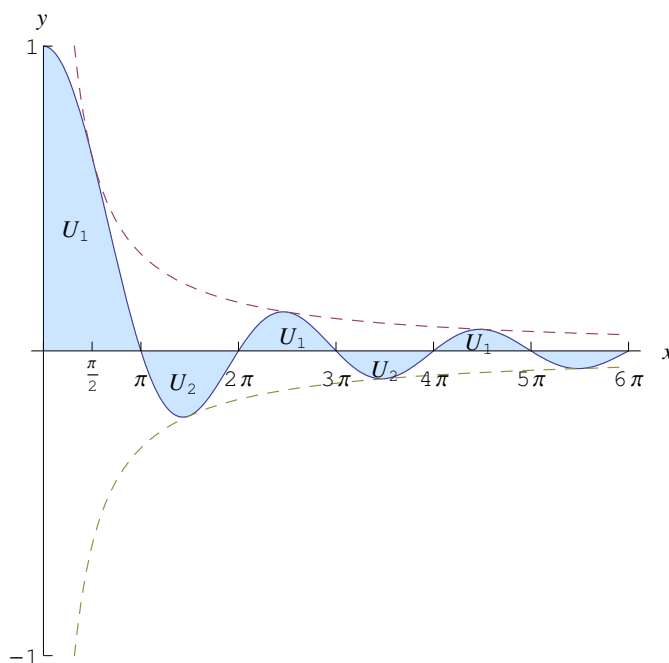


Figure 1: Andamento del grafico di  $f(x)$

La funzione cambia segno infinite volte, per cui applichiamo il procedimento standard di costruzione delle due funzioni:

$$f_{1,2}(x) = \frac{|f(x)| \pm f(x)}{2}$$

Quindi:

$$\int_A f(x) dx = \int_A f_1(x) dx - \int_A f_2(x) dx \quad (2)$$

Introduciamo i corrispondenti rettangoloidi generalizzati:

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, 0 \leq y \leq f_1(x)\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, -f_2(x) \leq y \leq 0\},$$

come illustrato in fig. (1). Poniamo poi:

$$U'_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, 0 \leq y \leq f_2(x)\},$$

avendosi

$$\text{mis } U'_2 = \text{mis } U_2$$

Inoltre:

$$\int_A f_1(x) dx = \text{mis } U_1$$

$$\int_A f_2(x) dx = \text{mis } U_2 = \text{mis } U'_2$$

Da ciò segue:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \text{mis } U_1 - \text{mis } U'_2, \quad (3)$$

e tale scrittura ha un senso se e solo se almeno uno dei due rettangoloidi ha misura finita. Esplicitiamo le due funzioni  $f_{1,2}$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{se } 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -\frac{\sin x}{x}, & \text{se } (2k+1)\pi \leq x \leq (2k+2)\pi \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Il rettangoloide generalizzato  $U_1$  può essere scritto come:

$$U_1 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k, \quad (4)$$

essendo:

$$V_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi, 0 \leq y \leq f_1(x)\}$$

Poniamo:

$$W_k = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5}{6}\pi, 0 \leq y \leq f_1(x) \right\}$$

È facile rendersi conto che  $V_k \supset W_k$ . Ciò è banalmente verificabile per  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} V_0) \quad & 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq f_1(x) \\ W_0) \quad & \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}\pi, \quad 0 \leq y \leq f_1(x), \end{aligned}$$

per cui  $V_0 \supset W_0$ .

L'area di  $U_1$  quindi si scrive per la (4):

$$\begin{aligned} \text{mis } U_1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \text{mis } V_k > \sum_{k=0}^{n-1} \text{mis } W_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi + \frac{\pi}{6}}^{2k\pi + \frac{5}{6}\pi} \frac{\sin x}{x} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{5}$$

Ora osserviamo che:

$$\forall k, \quad x \in \left[ 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5}{6}\pi \right] \implies \sin x \geq \frac{1}{2}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} x &\leq 2k\pi + \frac{5}{6}\pi < 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi \\ \implies x &> \frac{1}{(2k+1)\pi} > \frac{1}{2(k+1)\pi} \end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} \forall x \in \left[ 2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{5}{6}\pi \right], \quad \frac{\sin x}{x} &= (\sin x) \cdot \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2(k+1)\pi} \\ &= \frac{1}{4(k+1)\pi}, \end{aligned}$$

Quindi la (5) diventa:

$$\begin{aligned} \text{mis } U_1 &> \sum_{k=0}^{n-1} \int_{2k\pi + \frac{\pi}{6}}^{2k\pi + \frac{5}{6}\pi} \frac{\sin x}{x} dx > \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4(k+1)\pi} \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{mis } U_1 > \frac{1}{6} S_n,$$

avendo posto:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

che è la somma parziale di ordine  $n$  relativa alla serie armonica, e questa diverge:

$$\left( \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{mis } U_1 > \frac{1}{6} S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \right) \implies \text{mis } U_1 = +\infty$$

Ripetendo un procedimento analogo per il rettangoloide  $U'_2$ , si perviene allo stesso risultato:

$$\text{mis } U_2 = \text{mis } U'_2 = +\infty$$

Si conclude che la (3) non ha senso, in quanto si presenta nella forma  $\infty - \infty$ . Ciò è equivalente a dire che la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  non è integrabile in  $A = [0, +\infty)$ .

### Esercizio 1132

Studiare l'integrabilità della funzione

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1}, \quad (6)$$

nell'intervallo  $A = [0, 1]$ .

#### Soluzione

La funzione assegnata è definita in  $X = \mathbb{R} - \{0\}$ . Quindi nell'intervallo  $A$  è presente la singolarità:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Posto  $S = \{0\}$ , l'intervallo di continuità che ci interessa è  $A - S = (0, 1]$ . Osserviamo poi che  $\forall x \in A$ ,  $f(x) > 0$ , per cui la funzione è integrabile. Quindi:

$$\begin{aligned} \forall \{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}, \quad D_n \subseteq D_{n+1} \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = (0, 1] \\ \implies \int_A \frac{dx}{e^x - 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} \frac{1}{e^x - 1} dx \end{aligned}$$

Assumiamo per successione di domini  $D_n$ , la seguente:

$$D_n = \left[ \frac{1}{n}, 1 \right]$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^n \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{1/n}^n \frac{d(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln |1 - e^{-x}|_{1/n}^n \\
&= \ln \left( 1 - \frac{1}{e} \right) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln |1 - e^{-1/n}| \\
&= \ln \left( 1 - \frac{1}{e} \right) - \underbrace{\ln \lim_{n \rightarrow +\infty} |1 - e^{-1/n}|}_{=\ln 0^+ = -\infty} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Si conclude che la funzione è integrabile in  $A$  (questo è immediatamente deducibile dal segno costante della funzione in  $A$ ), e il suo integrale diverge positivamente:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - 1} = +\infty$$

### Esercizio 1136

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la sommabilità della funzione:

$$f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}},$$

nell'intervallo  $A = [0, 1]$ .

\*\*\*

### Soluzione

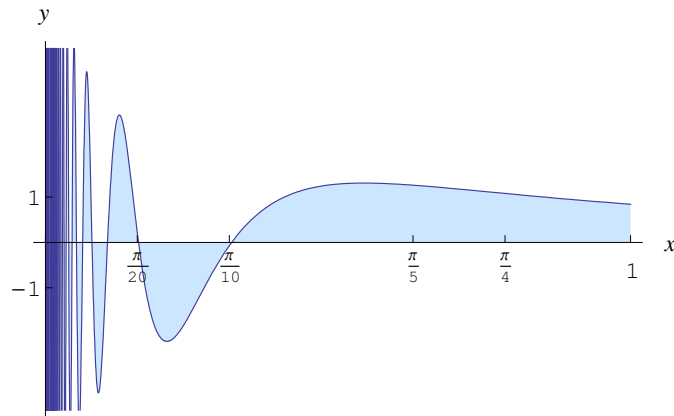
La funzione ha una singolarità in  $x_0 = 0$ , giacchè

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Evidentemente:

$$\forall x \in (0, 1], \left| \frac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{1}{x^{1/2}},$$

quindi per un noto criterio, la funzione risulta sommabile in  $A$ .



## Esercizio 1150

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la sommabilità della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

nell'intervallo  $A = (-\infty, +\infty)$ .

\*\*\*

### Soluzione

La funzione è infinitesima all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$$

La funzione è pari:  $f(-x) \equiv f(x)$ , per cui limitiamo a  $x \rightarrow +\infty$ . Assumendo come infinitesimo di riferimento  $g(x) = x^{-1}$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{-\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2} = l \in (0, +\infty) \iff \alpha = 2$$

Quindi per  $x \rightarrow \pm\infty$ , la funzione assegnata è un infinitesimo del second'ordine. Si conclude che la funzione è sommabile.