

Esercizio 33

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la sommabilità della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}},$$

nell'intervallo $A = [0, 1]$.

Soluzione

Il punto $x_0 = 1$ è una singolarità:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = +\infty$$

Osserviamo che $\forall x \in A$, $f(x) \geq 0$, per cui la funzione è ivi integrabile. Per studiare la sommabilità di $f(x)$ applichiamo un noto criterio (sufficiente). Stabiliamo l'ordine di infinito di $f(x)$ in x_0 . A tale scopo assumiamo come infinito di riferimento:

$$g(x) = \frac{1}{|x-1|}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|f(x)|}{|g(x)|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^\alpha x}{(1-x^2)^{1/3}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{\alpha-\frac{1}{3}} x}{(1+x)^{1/3}} = l \in (0, +\infty) \iff \alpha = \frac{1}{3}$$

Cioè per $x \rightarrow 1^-$, $f(x)$ è un infinito di ordine < 1 , per cui la funzione è sommabile:

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx &= -\frac{3}{4} \sqrt[3]{1-(1-\varepsilon)^2} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left(1 - \sqrt[3]{\varepsilon^4 - 4\varepsilon^3 + 4\varepsilon^3}\right) \\ &\implies \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Esercizio 34

Calcolare:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 5 \sin x \cos x}$$

Risulta:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sin^2 x (1 - 5 \cot x)}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \rightarrow y = \cot x$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int \frac{dy}{5y - 1} \\ &= \frac{1}{5} \ln |5y - 1| + C, \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$I(x) = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{5 - \tan x}{\tan x} \right| + C$$

Esercizio 36

Dimostrare che la sommabilità della funzione

$$f(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right),$$

in $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, calcolandone l'integrale.

La funzione non è regolare in $x = 0$ ($\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$).

Osserviamo che:

$$|f(x)| = \left| 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \left| 2x \sin \frac{1}{x} \right| + \left| \cos \frac{1}{x} \right| \stackrel{def}{=} g(x)$$

Quindi:

$$\forall x \in \left[0, \frac{2}{\pi}\right], |f(x)| \leq g(x),$$

cioè $f(x)$ è limitata in $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$, per cui è ivi sommabile.

Calcoliamone l'integrale:

$$I = \int_0^{2/\pi} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{2/\pi} \left[2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right] dx$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\begin{aligned} I(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{2/\pi} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx \\ &= I_1(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{2/\pi} \cos \frac{1}{x} dx \end{aligned} \tag{1}$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon}^{2/\pi} 2x \sin \frac{1}{x} dx \\ &= \left[x^2 \sin \frac{1}{x} \right]_{x=\varepsilon}^{x=\frac{2}{\pi}} - \int_{\varepsilon}^{2/\pi} x^2 \left(-\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} \right) dx \\ &= \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - \varepsilon^2 \sin \frac{1}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{2/\pi} \cos \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Sostituendo nella (1):

$$I(\varepsilon) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - \varepsilon^2 \sin \frac{1}{\varepsilon}$$

Quindi:

$$\int_0^{2/\pi} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - \varepsilon^2 \sin \frac{1}{\varepsilon} \right] = \frac{4}{\pi^2},$$

poichè $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \sin \frac{1}{\varepsilon} = 0$.

Esercizio 38

Calcolare

$$I(x) = \int e^{\sqrt{x}} dx$$

Soluzione

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$\xi = \sqrt{x} \implies d\xi = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2\xi} \implies dx = 2\xi d\xi,$$

donde:

$$I(\xi) = 2 \int \xi e^{\xi} d\xi$$

Procedendo per parti

$$I(\xi) = 2 \left(\xi e^{\xi} - \int e^{\xi} d\xi \right) = 2(\xi - 1) e^{\xi} + C,$$

ripristinando la variabile x :

$$I(x) = 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}} + C$$

Esercizio 39

Calcolare:

$$\int f(x) dx,$$

essendo

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2}$$

Soluzione

Riduciamo in fattori il denominatore:

$$x^4 + 3x^2 + 2 = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$$

Quindi decomponiamo $f(x)$ in frazioni semplici:

$$f(x) = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Deve essere:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{(x^2 + 2)(x^2 + 1)}$$

Da ciò si ottiene il sistema di equazioni lineari nelle (A, B, C, D) :

$$\begin{aligned} A + 0 + C + 0 &= 1 \\ 0 + B + 0 + D &= 1 \\ A + 0 + 2C + 0 &= 1 \\ 0 + B + 0 + 2D &= 2 \end{aligned}$$

Tale sistema è compatibile e determinato. La soluzione è:

$$(A, B, C, D) = (1, 0, 0, 1)$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}$$

L'integrale vale:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \arctan x + C \end{aligned}$$

Esercizio 40

Calcolare:

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

Soluzione

L'integrale è del tipo:

$$\int \mathcal{R}(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx,$$

essendo \mathcal{R} una funzione razionale.

Osserviamo che:

$$x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1,$$

per cui:

$$I(x) = \int \frac{dx}{(x+1)^2 \sqrt{(x+1)^2 + 1}}$$

Eseguiamo il cambio di variabile $x+1 = \tan t$, quindi $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ e tenendo conto della relazione $\sqrt{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{\cos t}$:

$$I(t) = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\tan^2 t \cdot \frac{1}{\cos t}} = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt = \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\sin t} + C$$

Per ripristinare la variabile x osserviamo che:

$$\frac{1}{\sin^2 t} = 1 + \frac{1}{\tan^2 t} = \frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} \implies \frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 + \tan^2 t}}{\tan t}$$

Quindi:

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{\sqrt{1 + (x+1)^2}}{x+1} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x+1},$$

da cui l'integrale:

$$I(x) = -\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}{x + 1} + C$$

Esercizio 41

Calcolare:

$$I(x) = \int x\sqrt{x^2 + x + 1} dx$$

Soluzione

In questo caso conviene eseguire una sostituzione iperbolica. Scriviamo innanzitutto:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= (x + k)^2 + l \\ &= x^2 + 2kx + k^2 + l, \end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} 2k = 1 \\ k^2 + l = 1 \end{cases} \implies k = \frac{1}{2}, l = \frac{3}{4}$$

Quindi:

$$I(x) = \int x\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sinh t \implies \begin{cases} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh t \\ \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cosh t \end{cases} \quad (2)$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{3}{4} \int \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sinh t - \frac{1}{2} \right) \cosh^2 t dt \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} \int \sinh t \cosh^2 t dt - \frac{3}{8} \int \cosh^2 t dt \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{8} I_1(t) - \frac{3}{8} I_2(t), \end{aligned}$$

essendo:

$$I_1(t) = \int \sinh t \cosh^2 t dt = \frac{1}{3} \cosh^3 t + C_1$$

$$I_2(t) = \int \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + C_2$$

Otteniamo:

$$I(t) = \frac{\sqrt{3}}{8} \cosh^3 t - \frac{3}{16} \sinh t \cosh t - \frac{3}{16} t + C$$

Per ripristinare la variabile x ricaviamo dalla (2):

$$\sinh t = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

Ciò implica:

$$\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t = \frac{4}{3} (x^2 + x + 1) \implies \cosh t = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + x + 1}$$

Poi:

$$t = \operatorname{arcsinh} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right)$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + x + 1)^3} - \frac{1}{4} \left(x + \frac{1}{2} \right) \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{3}{16} \operatorname{arcsinh} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C$$

Esercizio 72

Calcolare l'integrale:

$$I(x) = \int \frac{dx}{1 + \cos 3x}$$

Soluzione

Innanzitutto poniamo $y = 3x$, per cui:

$$I(y) = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{1 + \cos y}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$y \rightarrow t = \tan \frac{y}{2},$$

per cui:

$$\cos y = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dy = \frac{2dt}{1+t^2}$$

L'integrale diventa:

$$I(t) = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2}{3} \int \frac{dt}{2} = \frac{1}{3}t + C$$

Ripristinando la variabile x :

$$I(t) = \frac{1}{3} \tan \frac{3x}{2} + C$$

Esercizio 74

Calcolare l'integrale

$$I(x) = \int x^2 \cos^2 3x dx$$

Soluzione

Siccome $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \implies \int \cos^2 3x d(3x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{12} \sin 6x$, possiamo integrare per parti:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int x^2 d\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{12} \sin 6x\right) \\ &= x^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{12} \sin 6x\right) - \int \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{12} \sin 6x\right) 2x dx \\ &= \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{12} \sin 6x - \frac{1}{6} I_1(x), \end{aligned}$$

essendo:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int x \sin 6x dx = \int x d\left(-\frac{1}{6} \cos 6x\right) \\ &= -\frac{1}{6} x \cos 6x + \frac{1}{6} \int \cos 6x dx \\ &= -\frac{x}{6} \cos 6x + \frac{1}{36} \sin 6x + C_1 \end{aligned}$$

Quindi:

$$I(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{36} x \cos 6x + \frac{1}{216} (18x^2 - 1) \sin 6x + C$$

Esercizio 77

Studiare se la funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[k]{x}}, \quad \text{con } k > 1$$

è sommabile in $[0, 1]$.

Soluzione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

cioè $x_0 = 0$ è una singolarità. Osserviamo che in $[0, 1]$ è $f(x) > 0$, per cui la funzione è ivi integrabile. Per la sommabilità, applichiamo un noto criterio (sufficiente), determinando l'eventuale ordine di infinito di $f(x)$. A tale scopo prendiamo come infinito di riferimento la funzione $g(x) = 1/|x|$, quindi:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{g(x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha - \frac{1}{k}} = l \in \mathbb{R} - \{0\} \iff \alpha = \frac{1}{k}$$

Cioè, per $x \rightarrow 0^+$ la funzione è un infinito di ordine $\alpha = 1/k$, e poichè è $k > 1$, si conclude che l'ordine di infinito è comunque < 1 , donde la sommabilità di $f(x)$ in $[0, 1]$. Per valutare l'integrale eseguiamo l'operazione di passaggio al limite:

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_\varepsilon^1 f(x) dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon,$$

essendo:

$$I_\varepsilon = \int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{k}} dx = \frac{k}{k-1} \left(1 - \varepsilon^{1-\frac{1}{k}}\right)$$

Quindi:

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{k}{k-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(1 - \varepsilon^{1-\frac{1}{k}}\right) = \frac{k}{k-1}$$

Esercizio 91

Calcolare l'integrale:

$$I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}}$$

Soluzione

Scriviamo:

$$I(x) = \int \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{e^{-2x} + e^{-x} + 1}}$$

Esguiamo il cambio di variabile $y = e^{-x} \implies dy = -e^{-x} dx$, quindi:

$$I(y) = - \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + y + 1}}$$

$$y^2 + y + 1 = (y + k)^2 + l \implies k = \frac{1}{2}, l = \frac{3}{4} \implies y^2 + y + 1 = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} I(y) &= - \int \frac{dy}{\sqrt{\frac{3}{4} + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \\ &= - \ln \left| \frac{2y+1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}(4y^2 + 4y + 4) + 1} \right| + C_1 \\ &= - \ln \left| \frac{2y+1}{2} + \sqrt{y^2 + y + 1} \right| + C, \end{aligned}$$

essendo $C = - \ln \frac{2}{\sqrt{3}} + C_1$.

Ripristinando la variabile x :

$$I(x) = x - \ln \left| e^x + 2 + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1} \right| + C$$