

INTEGRALI DOPPI

Esercizi proposti

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_A (4 + 2x - 5y) dx dy$, $A = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$; [32]

(b) $\int_A (x^2 + y^3) dx dy$, $A = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$; [64/3]

(c) $\int_A (x^2 + y) dx dy$, $A = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$; [3/5]

(d) $\int_A (e^x + e^y) dx dy$, $A = \{(x, y) : -3 \leq x \leq 3, -x \leq y \leq x\}$; $[5e^3 + e^{-3}]$

(e) $\int_A (x + y) dx dy$, $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x^2\}$; [261/20]

(f) $\int_A \sin y^2 dx dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2\sqrt{\pi}, x/2 \leq y \leq \sqrt{\pi}\}$; [2]

(g) $\int_A |y - x| dx dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$; $[-11/60]$

(h) $\int_A |x^3 - y| dx dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$; [23/14]

(i) $\int_A (x + 1) dx dy$, $A = \{(x, y) : y \leq 2x, y \leq -2x, y \geq x^2 - 3\}$ [10/3]

(j) $\int_A x dx dy$, $A = \{(x, y) : y \leq x, y \leq -x + 6, y \geq x^2 - 6x\}$. [135]

2. Sia A la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (3, 0)$ e $A_3 = (0, 3)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di A rispetto al vertice A_3 . [27]

3. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$. [44/105]

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

(a) $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\}$;

(b) $B = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq -x^2 + 4\}$.

$$\left[\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5} \right) \text{ e } \left(0, \frac{8}{5} \right) \right]$$

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq x\}$; $[\sqrt{2}]$

(b) $\int_D \frac{y^2}{1 + x^2 + y^2} dx dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$; $[\pi(1 - \log 2)/8]$

(c) $\int_D (1 + x^2 + y^2) dx dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \leq -x\}$; $[3\pi/4]$

$$(d) \int_D y^2 dx dy, \quad D = \{(x, y) : 25x^2 + 16y^2 \leq 400, y \geq 0\}. \quad [25\pi/8]$$

6. Determinare il baricentro e calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $C = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, x \geq 0, y \geq 0\}$.

$$\left[\left(\frac{13}{3\pi}, \frac{13}{3\pi} \right), 10\pi \right]$$

7. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$(a) \int_D \frac{1}{3 + x^2 + y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\}; \quad [\text{divergente}]$$

$$(b) \int_D e^{-x^2-y^2} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4, x \geq 0, y \geq 0\}; \quad [\pi/4]$$

$$(c) \int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}; \quad [\pi/4]$$

$$(d) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^3} dx dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}. \quad [\text{divergente}]$$

INTEGRALI DOPPI

Esercizi svolti

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(b) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$;

(c) $\int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$;

(d) $\int_A (x - 2y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$;

(e) $\int_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 + x\}$;

(f) $\int_A (x + y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}$;

(g) $\int_A \frac{\sin y}{y} \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}$;

(h) $\int_A (x + 2y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \min\{x^2, x\} \leq y \leq \max\{x^2, x\}\}$;

(i) $\int_A x \sin|x^2 - y| \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(j) $\int_A |\sin x - y| \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$;

(k) $\int_A x^2 \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : y \leq -x^2 + x/2 + 3, y \geq -x^2 - x, y \geq -x^2 + 2x\}$.

2. Sia A la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 1)$ e $A_3 = (2, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di A rispetto al vertice A_1 .

3. Sia B la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, 1)$ e $B_3 = (1, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di B rispetto al vertice B_3 .

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

(a) $A = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$;

(b) $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_D y^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$;

(b) $\int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$;

(c) $\int_D x^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$;

$$(d) \int_D y \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0\}.$$

6. Sia D un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (r, 0)$ e raggio r . Verificare la relazione $I_0 = I_C + r^2 A$, dove I_0 e I_C sono i momenti di inerzia di D rispetto a O e a C e A è l'area di D .

7. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$.

8. Calcolare i seguenti integrali impropri:

$$(a) \int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\};$$

$$(b) \int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(c) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\};$$

$$(d) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\};$$

$$(e) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}.$$

INTEGRALI DOPPI
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per verticali si ottiene

$$\int_A xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(b) $\int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$.

È possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.
Integrando per orizzontali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_3^4 \frac{1}{(x+y)^2} \, dx \right) dy = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_3^4 dy = \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{1}{4+y} + \frac{1}{3+y} \right) dy = [-\log(4+y) + \log(3+y)]_1^2 = \frac{25}{24}. \end{aligned}$$

(c) $\int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$.

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per verticali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A (2x^2 + 3y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 (2x^2 + 3y) \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[2x^2 y + \frac{3}{2} y^2 \right]_{x^2}^1 dx = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{7}{2} x^4 + 2x^2 + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{7}{10} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x \right]_0^1 = \frac{22}{15}. \end{aligned}$$

(d) $\int_A (x - 2y) \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$.

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A (x - 2y) \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{2-y} (x - 2y) \, dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} - 2xy \right]_0^{2-y} dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{5}{2} y^2 - 6y + 2 \right) dy = \left[\frac{5}{6} y^3 - 3y^2 + 2y \right]_0^2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(e) $\int_A xy \, dx \, dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 + x\}$.

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa, ma per la forma esplicita di A è più conveniente integrare per verticali. Si ha quindi

$$\begin{aligned} \int_A xy \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{1+x} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{1+x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (-x^5 + x^3 + 2x^2 + x) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{8}. \end{aligned}$$

$$(f) \int_A (x+y) dx dy, A = \{(x, y) : 2x^3 \leq y \leq 2\sqrt{x}\}.$$

La regione A è sia orizzontalmente che verticalmente convessa. È quindi possibile risolvere l'integrale indifferentemente per orizzontali o per verticali.

Integrando per orizzontali risulta

$$\begin{aligned} \int_A (x+y) dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}} (x+y) dx \right) dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{(y/2)^2}^{(y/2)^{1/3}} dy = \\ &= \int_0^2 \left(-\frac{x^4}{32} - \frac{y^3}{4} + \frac{y^{2/3}}{2^{5/3}} + \frac{y^{4/3}}{2^{1/3}} \right) dy = \left[-\frac{y^5}{5 \cdot 32} - \frac{y^4}{16} + \frac{3y^{5/3}}{5 \cdot 2^{5/3}} + \frac{3y^{7/3}}{7 \cdot 2^{1/3}} \right]_0^2 = \frac{39}{35}. \end{aligned}$$

$$(g) \int_A \frac{\sin y}{y} dx dy, A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi\}.$$

Sebbene la regione A sia verticalmente e orizzontalmente convessa, non è possibile calcolare esplicitamente l'integrale per verticali, infatti la funzione $(\sin y)/y$ non è integrabile elementarmente rispetto a y . Integrando per orizzontali si ottiene invece

$$\int_A \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^\pi \left(\int_0^y \frac{\sin y}{y} dx \right) dy = \int_0^\pi \sin y dy = [-\cos y]_0^\pi = 2.$$

$$(h) \int_A (x+2y) dx dy, A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \min\{x^2, x\} \leq y \leq \max\{x^2, x\}\}.$$

L'insieme A può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}, \quad A_2 = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^2\}$$

la cui intersezione si riduce ad un punto delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A (x+2y) dx dy = \int_{A_1} (x+2y) dx dy + \int_{A_2} (x+2y) dx dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali. Si ha

$$\begin{aligned} \int_{A_1} (x+2y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^x (x+2y) dy \right) dx = \int_0^1 [xy + y^2]_{x^2}^x dx = \\ &= \int_0^1 (2x^2 - x^3 - x^4) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{13}{60} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{A_2} (x+2y) dx dy &= \int_1^2 \left(\int_x^{x^2} (x+2y) dy \right) dx = \int_1^2 [xy + y^2]_x^{x^2} dx = \\ &= \int_1^2 (-2x^2 + x^3 + x^4) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \right]_1^2 = \frac{317}{60} \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_A (x+2y) dx dy = \frac{13}{60} + \frac{317}{60} = \frac{11}{2}.$$

$$(i) \int_A x \sin |x^2 - y| dx dy, A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Poichè

$$\sin |x^2 - y| = \begin{cases} \sin(x^2 - y) & \text{se } y \leq x^2 \\ \sin(y - x^2) & \text{se } y > x^2, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A x \sin |x^2 - y| dx dy = \int_{A_1} x \sin(x^2 - y) dx dy + \int_{A_2} x \sin(y - x^2) dx dy$$

dove

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}, \quad A_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{A_1} x \sin(x^2 - y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} x \sin(x^2 - y) dy \right) dx = \int_0^1 x [\cos(x^2 - y)]_0^{x^2} dx = \\ &= \int_0^1 (x - x \cos(x^2)) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \sin(x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{A_2} x \sin(y - x^2) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 x \sin(y - x^2) dy \right) dx = \int_0^1 x [-\cos(y - x^2)]_{x^2}^1 dx = \\ &= \int_0^1 (x - x \cos(1 - x^2)) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \sin(1 - x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1 \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_A (x + 2y) dx dy = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin 1 = 1 - \sin 1.$$

(j) $\int_A |\sin x - y| dx dy$, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}$.

Poichè

$$|\sin x - y| = \begin{cases} \sin x - y & \text{se } y \leq \sin x \\ y - \sin x & \text{se } y > \sin x, \end{cases}$$

si ha

$$\int_A |\sin x - y| dx dy = \int_{A_1} (\sin x - y) dx dy + \int_{A_2} (y - \sin x) dx dy$$

dove

$$A_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}, \quad A_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, \sin x \leq y \leq 1\}$$

Integrando per verticali otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{A_1} (\sin x - y) dx dy &= \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} (\sin x - y) dy \right) dx = \int_0^\pi \left[y \sin x - \frac{y^2}{2} \right]_0^{\sin x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^\pi = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{A_2} (y - \sin x) dx dy &= \int_0^\pi \left(\int_{\sin x}^1 (y - \sin x) dy \right) dx = \int_0^\pi \left[\frac{y^2}{2} - y \sin x \right]_{\sin x}^1 dx = \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} \sin^2 x - \sin x + \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^\pi \left(\frac{1}{4} (1 - \cos 2x) - \sin x + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{3}{4} x - \frac{1}{8} \sin 2x + \cos x \right]_0^\pi = \frac{3}{4} \pi - 2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_A |\sin x - y| dx dy = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4} \pi - 2 = \pi - 2.$$

(k) $\int_A x^2 dx dy$, $A = \{(x, y) : y \leq -x^2 + x/2 + 3, y \geq -x^2 - x, y \geq -x^2 + 2x\}$.

L'insieme A può essere visto come l'unione dei due insiemi

$$A_1 = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 0, -x^2 - x \leq y \leq -x^2 + x/2 + 3\},$$

$$A_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, -x^2 + 2x \leq y \leq -x^2 + x/2 + 3\}$$

aventi in comune solo punti delle relative frontiere. Possiamo quindi decomporre l'integrale secondo:

$$\int_A x^2 dx dy = \int_{A_1} x^2 dx dy + \int_{A_2} x^2 dx dy$$

dove entrambi gli integrali a secondo membro possono essere risolti integrando per verticali.

Si ha

$$\int_{A_1} x^2 dx dy = \int_{-2}^0 \left(\int_{-x^2-x}^{-x^2+x/2+3} x^2 dy \right) dx = \int_{-2}^0 \left(\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[\frac{3}{8}x^4 + x^3 \right]_{-2}^0 = 2$$

e

$$\int_{A_2} x^2 dx dy = \int_0^2 \left(\int_{-x^2+2x}^{-x^2+x/2+3} x^2 dy \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^3 + 3x^2 \right) dx = \left[-\frac{3}{8}x^4 + x^3 \right]_0^2 = 2$$

Quindi

$$\int_A x^2 dx dy = 2 + 2 = 4.$$

2. Sia A la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $A_1 = (0, 0)$, $A_2 = (1, 1)$ e $A_3 = (2, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di A rispetto al vertice A_1 .

Essendo

$$A = \{(x, y) : y \leq x \leq 2 - y, 0 \leq y \leq 1\}$$

si ha

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_A (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_y^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x \right]_y^{2-y} dy = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{8}{3}y^3 + 4y^2 - 4y + \frac{8}{3} \right) dy = \left[-\frac{2}{3}y^4 + \frac{4}{3}y^3 - 2y^2 + \frac{8}{3}y \right]_0^1 = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

3. Sia B la regione di piano racchiusa nel triangolo di vertici $B_1 = (0, 0)$, $B_2 = (0, 1)$ e $B_3 = (1, 0)$ e dotata di densità unitaria. Calcolare il momento di inerzia di B rispetto al vertice B_3 .

Risulta

$$B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Poichè la distanza del generico punto $(x, y) \in B$ dal vertice B_3 è $\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, si ha

$$\begin{aligned} I_{B_3} &= \int_B ((x-1)^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} ((x-1)^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^1 \left[y(x-1)^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^{1-x} dx = \\ &= -\frac{4}{3} \int_0^1 (x-1)^3 dx = -\frac{1}{3} [(x-1)^4]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4. Calcolare il baricentro delle regioni di piano dotate di densità unitaria

(a) $A = \{(x, y) : x^2 \leq y \leq 1\}$.

Siano \bar{x}_A e \bar{y}_A le coordinate del baricentro di A .

Per simmetria risulta $\bar{x}_A = 0$.

Invece

$$\bar{y}_A = \frac{1}{M(A)} \int_A y dx dy$$

dove $M(A)$ è la massa di A .

Poichè

$$M(A) = \int_A dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 dy \right) dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$$

e

$$\int_A y dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 y dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - x^4) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{5},$$

risulta $\bar{y}_A = 3/5$.

(b) $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

Siano \bar{x}_B e \bar{y}_B le coordinate del baricentro di B .

Per simmetria risulta $\bar{x}_B = 0$.

Invece

$$\bar{y}_B = \frac{1}{M(B)} \int_B y \, dx \, dy$$

dove $M(B)$ è la massa di B .

Poichè

$$M(B) = \int_B dx \, dy = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\int_B y \, dx \, dy = \int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y \, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

risulta $\bar{y}_B = 4/(3\pi)$.

5. Calcolare i seguenti integrali doppi:

(a) $\int_D y^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$.

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ diventa $0 \leq \rho \leq 1$, mentre $y \geq 0$ diventa $\sin \theta \geq 0$, ossia $0 \leq \theta \leq \pi$.

L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\begin{aligned} \int_D y^2 \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \rho^3 \sin^2 \theta \, d\theta \right) d\rho = \int_0^1 \rho^3 \left(\int_0^\pi \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \, d\theta \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

(b) $\int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$;

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $x^2 + y^2 \leq 1$ diventa $0 \leq \rho \leq 1$, mentre $0 \leq y \leq x$ diventa $0 \leq \sin \theta \leq \cos \theta$, ossia $0 \leq \theta \leq \pi/4$.

L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha:

$$\int_D x^2 + y^2 \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^3 \, d\theta \right) d\rho = \frac{\pi}{4} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{16}.$$

(c) $\int_D x^2 \, dx \, dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$.

L'integrale può essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $x^2 + y^2 = \rho^2$, la condizione $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ diventa $1 \leq \rho \leq 2$, mentre $y \geq 0$ diventa $0 \leq \theta \leq \pi$. L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\begin{aligned} \int_D x^2 dx dy &= \int_1^2 \left(\int_0^\pi \rho^3 \cos^2 \theta d\theta \right) d\rho = \int_1^2 \rho^3 \left(\int_0^\pi \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \rho^3 \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_1^2 = \frac{15}{8} \pi. \end{aligned}$$

(d) $\int_D y dx dy$, $D = \{(x, y) : 4x^2 + 9y^2 \leq 36, y \geq 0\}$.

Per il calcolo dell'integrale è utile la trasformazione

$$\begin{cases} x = 3\rho \cos \theta \\ y = 2\rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Poichè $4x^2 + 9y^2 = 36\rho^2$, la condizione $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ diventa $0 \leq \rho \leq 1$, mentre $y \geq 0$ diventa $0 \leq \theta \leq \pi$.

L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il rettangolo:

$$\{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo 6ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\int_D y dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^\pi 6\rho^2 \sin \theta d\theta \right) d\rho = \int_0^1 6\rho^2 [-\cos \theta]_0^\pi d\rho = 12 \int_0^1 \rho^2 d\rho = 4[\rho^3]_0^1 = 4.$$

6. Sia D un disco circolare dotato di densità unitaria, avente centro in $C = (r, 0)$ e raggio r . Verificare la relazione $I_0 = I_C + r^2 A$, dove I_0 e I_C sono i momenti di inerzia di D rispetto a O e a C e A è l'area di D .

Risulta

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r + r)^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r)^2 + 2r(x - r) + r^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_D ((x - r)^2 + y^2) dx dy + r^2 \int_D dx dy + 2r \int_D (x - r) dx dy \\ &= I_C + r^2 A + 2r \int_D (x - r) dx dy \\ &= I_C + r^2 A \end{aligned}$$

poichè per simmetria risulta

$$\int_D (x - r) dx dy = 0.$$

7. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'origine degli assi della lamina piana di densità unitaria $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$.

Poichè l'insieme C è invariante rispetto alla simmetria per l'origine e la funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ è pari rispetto a tale simmetria risulta

$$I_0 = \int_C (x^2 + y^2) dx dy = 2 \int_{C'} (x^2 + y^2) dx dy$$

dove

$$C' = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 - 2x \geq 0, y \geq 0\}.$$

L'integrale può ora essere calcolato utilizzando coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

L'insieme di integrazione nel piano ρ, θ è quindi il seguente:

$$\{(\rho, \theta) : 2 \cos \theta \leq \rho \leq 3, 0 \leq \theta \leq \pi/2\} \cup \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 3, \pi/2 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Essendo ρ lo Jacobiano della trasformazione, si ha

$$\begin{aligned} I_0 &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\int_{2 \cos \theta}^3 \rho^3 d\rho \right) d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\int_0^3 \rho^3 d\rho \right) d\theta \right) = \left(\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{2 \cos \theta}^3 d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^3 d\theta \right) = \\ &= 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{81}{4} - 4 \cos^4 \theta \right) d\theta + \frac{81}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \right) = 2 \left(\int_0^{\pi/2} \left(\frac{77}{4} - 2 \cos 2\theta - \frac{1}{2} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \right) d\theta + \frac{81}{8} \right) = \\ &= 2 \left[\frac{75}{4} \theta - \sin 2\theta - \frac{1}{8} \sin 4\theta \right]_0^{\pi/2} + \frac{81}{4} \pi = 39\pi. \end{aligned}$$

8. Calcolare i seguenti integrali impropri:

(a) $\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2\}$.

Sia

$$D_R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}, \quad (R > 1)$$

allora

$$\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \int_{D_R} (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy &= \int_1^R \left(\int_0^{2\pi} \rho^{-2\alpha+1} d\theta \right) d\rho = 2\pi \int_1^R \rho^{-2\alpha+1} d\rho \\ &= \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} (R^{-2\alpha+2} - 1) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 2\pi \log R & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \begin{cases} \frac{\pi}{1-\alpha} (R^{-2\alpha+2} - 1) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ 2\pi \log R & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

e quindi l'integrale diverge positivamente se $\alpha \leq 1$, vale $\pi/(\alpha - 1)$ se $\alpha > 1$.

(b) $\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy$, $D = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2, x \geq 0, y \geq 0\}$;

Sia

$$D_R = \{(x, y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad (R > 2)$$

allora

$$\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \int_{D_R} \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy &= \int_2^R \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} d\theta \right) d\rho = \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} d\theta \right) \left(\int_2^R \frac{1}{\rho} d\rho \right) = \frac{\pi}{4} (\log R - \log 2). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D \frac{xy}{(x^4 + y^4)} dx dy = \frac{\pi}{4} \lim_{R \rightarrow +\infty} (\log R - \log 2) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge positivamente.

$$(c) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy, D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Sia

$$D_R = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}, \quad (R > 1)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{D_R} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \int_{D_R} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_1^R \left(\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho^2} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_1^R \frac{1}{\rho^2} [\sin \theta]_0^{\pi/2} d\rho = \\ &= \int_1^R \frac{1}{\rho^2} d\rho = \left[-\frac{1}{\rho} \right]_1^R = 1 - \frac{1}{R}. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{R} \right) = 1.$$

$$(d) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy, D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}.$$

Sia

$$D_\epsilon = \{(x, y) : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}, \quad (\epsilon > 0)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \int_\epsilon^1 \left(\int_0^{\pi/4} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_\epsilon^1 [\sin \theta]_0^{\pi/4} d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \int_\epsilon^1 d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \epsilon).$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)} dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (1 - \epsilon) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$(e) \int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy, D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}.$$

Sia

$$D_\epsilon = \{(x, y) : \epsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1, -x \leq y \leq 0\}, \quad (\epsilon > 0)$$

allora

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Utilizzando coordinate polari si ha

$$\begin{aligned} \int_{D_\epsilon} \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy &= \int_\epsilon^1 \left(\int_{-\pi/4}^0 \frac{1}{\rho^2} \cos \theta d\theta \right) d\rho = \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2} [\sin \theta]_{-\pi/4}^0 d\rho = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_\epsilon^1 \frac{1}{\rho^2} d\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-\frac{1}{\rho} \right]_\epsilon^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\int_D \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} dx dy = \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\epsilon} - 1 \right) = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge positivamente.

Corso di laurea in Ingegneria Elettronica
Corso di laurea in Ingegneria Informatica (A-L)
Corso di laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni
Analisi Matematica II - A.A.2002/2003

Esercizi sugli integrali doppi

1. Calcolare

$$\int_{D_1 \cup D_2} (x^2 + y^2 - 1) dx dy$$

ove

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leq 0, y \geq -x, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq y \leq -x, -\sqrt{2} \leq x \leq 0, x^2 + y^2 \geq 1\}.$$

2. Calcolare

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2 + y^2} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0\}$.

3. Calcolare l'integrale doppio

$$I = \iint_D (x^3 - y^2) dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4. Calcolare il volume del cilindroide relativo alla funzione

$$h(x, y) = \frac{x^2}{y^2 + 2}$$

nel dominio delimitato dalle rette $x = -1, y = 1, y = x$.

5. Calcolare

$$\iint_D \frac{\tan(x+y)}{\sin^2(x+y) + 1} dx dy$$

dove D é il dominio $|x| + |y| \leq 1$.

6. Calcolare

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + 5} dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 1, y \geq x, x \leq 0\}$.

7. Sia D la regione del primo quadrante delimitata dalle curve $xy = 1, xy = 2, y = \frac{x}{2}, y = 2x$. Calcolare

$$\iint_D \left(xy + x^3 y^3 + \frac{y^4}{x^4} \right) dx dy.$$

8. Calcolare

$$\iint_D x \, dx dy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 1, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

9. Calcolare

$$\iint_D \frac{x(x^2 - y^2)}{1 + [(x-1)^2 + (y-1)^2]^2} dx dy$$

dove D é il cerchio di centro $(1, 1)$ e raggio 1.

10. Sia D il dominio di \mathbf{R}^2 delimitato dalle curve $y = \arcsin x, y = \arccos x, x = 0$. Calcolare, usando una delle formule di Green, il volume del cilindroide di base D relativo alla funzione

$$z = \frac{\partial}{\partial y}(f(y) + \phi(x))$$

dove $f(y) = \frac{\sin^2 y}{\sin^2 y + 1}$ e $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ é continua.

Esercizi sugli Integrali Doppi¹

- 1*. Calcolare le aree dei tre domini rinchiusi della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ e la cardiode $\rho^2 = 2(1 + \cos \theta)$. (CP)
2. Calcolare il volume del dominio rinchiuso del piano xy , il cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e la paraboloida $z = x^2 + y^2$. (CP)
3. Calcolare il volume del dominio rinchiuso del piano xy , il cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (CP)
4. Calcolare il volume rinchiuso tra la paraboloida $z = x^2 + y^2$ e il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. (CP)
5. Sia D il dominio rinchiuso tra i grafici di $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x - x^2$. Calcolare $\int_D x^2 y \, dx \, dy$.
6. Calcolare l'area del dominio rinchiuso dai grafici delle funzioni $f(x) = x^3$ e $g(x) = x^5$.
7. Calcolare il volume della parte dell'intersezione dei domini $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ che si trova sopra il piano xy . (CP)
8. Calcolare l'area dell'intersezione dei domini $x^2 + y^2 \leq 1$ e $x^2 + y^2 \leq 2x$. (CP, utilizzando che i domini si possono rappresentare dalle equazioni $\rho \leq 1$ e $\rho \leq 2 \cos \theta$).
9. Calcolare l'area del dominio rinchiuso dalla spiraglia $\rho = a e^{-b\theta}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) e l'asse x . (CP)
10. Sia D il dominio nel primo quadrante rinchiuso dal catenoide $f(x) = \cosh(x)$, gli assi x e y e la retta verticale $x = 1$. Calcolare l'integrale $\int_D (y / \cosh(x)) \, dx \, dy$.
- 11.* Calcolare il volume del solido rinchiuso dalle sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.
12. Calcolare il volume del solido rinchiuso dal cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e i coni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$. (CP)

¹CP indica il consiglio di utilizzare le coordinate polari.

13. Calcolare il volume del solido rinchiuso tra i coni $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ e $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$. (CP)
14. La curva di equazione $x^3 + y^3 = 1$ ha la retta $y = -x$ come asintoto obliquo e taglia gli assi nei punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Sia D il dominio rinchiuso dagli assi x e y e questa curva. Calcolare l'integrale $\int_D 3x^2y^2 dx dy$.
15. Sia D il dominio rinchiuso dai grafici delle funzioni $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = 2x - 1$. Calcolare $\int_D 2xy dx dy$.
16. Calcolare il volume del solido nel primo ottante che si trova all'interno del rettangolo $|x| + |y| \leq 1$ e sotto l'iperboloide $z = xy$.
- 17.* Calcolare il volume nel primo ottante del solido rinchiuso dal piano $z = 0$, dall'iperboloide $z = 2xy$ e dal cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (CP, scrivendo l'equazione dell'iperboloide nella forma $z = \rho^2 \sin(2\theta)$.)