Esercizio 1 *Si descriva il campo di esistenza delle seguenti funzioni delle variabili x e y.*

$$\log(xy)\ ,\quad \sqrt{xy}\ ,\quad \frac{x^2}{x-y}\ ,\quad \log|xy|\ ,\quad \frac{1}{xy}\ ,\quad \frac{\log x}{\sqrt{x+y}}\ ,\quad \arcsin(x-y)$$

Esercizio 2 *Si calcolino le derivate parziali delle seguenti funzioni delle variabili x e y.*

$$x\log(xy^2)\ ,\quad e^{xy}\ ,\quad e^x e^y\ ,\quad \log(x\cos y)\ ,\quad \frac{x^2}{y}\ ,\quad x\sin(x^2y)\ ,\quad \frac{1}{xy}\ ,\quad \sqrt{1-xy^2}$$

Esercizio 3 *Dire tra le superfici aventi le equazioni seguenti quali sono superfici di rotazione e descrivere la curva che, ruotando attorno all'asse z, determina la superficie.*

$$z=\log(x^2-xy+y^2),\quad z=\log(x^2+y^2),\quad z=e^{\sqrt{x^2+y^2}},\quad z=2-\sqrt{x^2+y^2}$$

Esercizio 4 *Calcolare la derivata direzionale della funzione $f(x,y)=xe^{xy}$ nel punto $P(1,0)$, nella direzione del vettore $\mathbf{w}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}$.*

Essendo $f(x,y)$ differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$, la sua derivata direzionale nel punto $P(1,0)$ nella direzione di $\mathbf{w}$ è data da $\nabla f(1,0)\cdot\mathbf{v}$, dove ∇f è il gradiente di f e $\mathbf{v}$ è un vettore unitario (versore) parallelo e concorde a $\mathbf{w}$.
Le derivate parziali di f sono $\dfrac{\partial f}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2e^{xy}$. Abbiamo quindi $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0)=1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)=1$, e il vettore $\nabla f(1,0)$ è $\mathbf{i}+\mathbf{j}$.
Determiniamo il versore $\mathbf{v}$ dividendo $\mathbf{w}$ per il suo modulo: $\mathbf{v}=\dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|}=\dfrac{\mathbf{w}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{i}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j}$.
La derivata direzionale cercata vale dunque $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. ■

Esercizio 5 *Data la funzione $f(x,y)=\log(y-x^2+e)$, determinare l'equazione della sua linea L di livello passante per l'origine. Verificare che $\nabla f(0,0)$ è perpendicolare a L nell'origine.*

La linea di livello di una funzione f passante per (x_0,y_0) ha equazione $f(x,y)=f(x_0,y_0)$. Nel nostro caso abbiamo $f(0,0)=\log e=1$ e quindi L ha equazione $\log(y-x^2+e)=1$ che equivale a $y-x^2+e=e^1$, cioè a $y=x^2$. Si tratta di una parabola con vertice nell'origine e quindi in tale punto la sua tangente è l'asse x.
Le derivate parziali di f sono

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-2x}{y-x^2+e}\qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y-x^2+e}$$

ed in $(0,0)$ valgono rispettivamente 0 e $\dfrac{1}{e}$. Da ciò segue $\nabla f(0,0)=\dfrac{1}{e}\mathbf{j}$ che è un vettore perpendicolare all'asse x. ■

Esercizio 6 *Si consideri la superficie*

$$S\ :\ z = f(x,y) = x^2y + 2xy - \log y$$

Determinare l'equazione della curva di livello passante per $P(1,1)$ e l'equazione della retta r (del piano xy) tangente a tale curva in P.

Le equazioni delle curve di livello di S hanno la forma $x^2y + 2xy - \log y = c$; la condizione di passaggio per $P(1,1)$ dà $c = 3$.

Il gradiente di f calcolato in P è un vettore perpendicolare alla curva di livello passante per P; abbiamo $\nabla f = (2xy + 2y)\mathbf{i} + (x^2 + 2x - \frac{1}{y})\mathbf{j}$ e $\nabla f(1,1) = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. Ogni vettore perpendicolare a $\nabla f(1,1)$, per esempio $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, è parallelo a r. Possiamo quindi ricavare le equazioni parametriche di $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$. ■

Esercizio 7 *Si consideri la superficie S di equazione $z = f(x,y) = \log(x^2 + 2y^2)$. Verificare che il punto $P(1,0,0)$ appartiene a S e determinare l'equazione del piano π tangente a S in P.*

Il punto P appartiene a S perché $f(1,0) = 0$.

Le derivate parziali

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + 2y^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y}{x^2 + 2y^2}$$

valgono rispettivamente 2 e 0 in $(1,0)$. L'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è

$$f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$

da cui ricaviamo che l'equazione del piano π è $2x - z - 2 = 0$. ■

Esercizio 8 *Data la funzione $f(x,y) = x^2y - x$ si determinino i versori $\mathbf{v}$ tali che la derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(1,2)$ risulti uguale a 1.*

Scriviamo $\mathbf{v}$ come $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$. Il fatto che sia un versore corrisponde alla condizione $a^2 + b^2 = 1$.

Le derivate parziali di f sono $f_x(x,y) = 2xy - 1$ e $f_y(x,y) = x^2$. Da ciò segue $\nabla f(1,2) = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$, e quindi $D_{\mathbf{v}}f(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \mathbf{v} = 3a + b$.

Possiamo determinare $\mathbf{v}$ risolvendo il sistema $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 3a + b = 1 \end{cases}$. Questo sistema ha due soluzioni: $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$ e $\begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = -\frac{4}{5} \end{cases}$. I versori $\mathbf{v}$ che verificano le condizioni date sono quindi $\mathbf{v_1} = \mathbf{j}$ e $\mathbf{v_2} = \dfrac{3}{5}\mathbf{i} - \dfrac{4}{5}\mathbf{j}$. ■

Esercizio 9 *Si considerino i versori* $\mathbf{v_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{v_2} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{4}{5}\mathbf{j}$*. Si supponga inoltre che* $D_{\mathbf{v_1}}f(a,b) = 3\sqrt{2}$ *e* $D_{\mathbf{v_2}}f(a,b) = 5$*, dove* f *è una funzione differenziabile in* (a,b)*. Determinare le derivate parziali di* f *in* (a,b)*.*

Poichè f è differenziabile in (a,b), le sue derivate direzionali $D_{\mathbf{v_1}}f(a,b)$ e $D_{\mathbf{v_2}}f(a,b)$ sono rispettivamente uguali a $\nabla f(a,b)\cdot\mathbf{v_1}$ e $\nabla f(a,b)\cdot\mathbf{v_2}$. Possiamo quindi determinare $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ risolvendo il sistema lineare

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}f_x(a,b) + \frac{1}{\sqrt{2}}f_y(a,b) = 3\sqrt{2} \\ \frac{3}{5}f_x(a,b) - \frac{4}{5}f_y(a,b) = 5 \end{cases}$$

Ricaviamo $f_x(a,b) = 7$ e $f_y(a,b) = -1$. ■

Esercizio 10 *Si considerino le funzioni* $f(x,y) = e^{xy}\sin x$*,* $\varphi(t) = \log t$ *e* $\psi(t) = t^2$*. Detta* $F(t)$ *la funzione* $f(\varphi(t),\psi(t))$*, si calcoli* $F'(1)$*.*

Per il teorema della derivazione della funzione composta abbiamo

$$F'(t) = f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)$$

Abbiamo inoltre

$$f_x(x,y) = ye^{xy}\sin x + e^{xy}\cos x, \quad f_y(x,y) = xe^{xy}\sin x, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{t}, \quad \psi'(t) = 2t$$

Sostituendo i valori otteniamo

$$F'(1) = f_x(0,1)\varphi'(1) + f_y(0,1)\psi'(1) = 1$$

■