Avvertenza. Si consiglia di leggere attentamente gli svolgimenti dei seguenti esercizi e di non limitarsi a cercare di vedere "come si fa". Se ci si limita a questo, senza considerare gli aspetti teorici su cui le soluzioni si basano, gli esercizi servono a poco più di niente.

Esercizio 1 *Dire se la funzione lineare* $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *rappresentata dalla matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ *nella base canonica è suriettiva, cioè se, dato un qualsiasi* $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, *esiste un vettore* $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *tale che* $\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{u}$.

In caso di risposta negativa, si determini un vettore che non appartiene a $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$.

La funzione $\mathcal{F}$ è suriettiva se il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad (*)$$

ha soluzioni per ogni scelta di a, b e c. Il determinante della matrice A è diverso da 0 e quindi A ha rango 3. Anche è la matrice completa del sistema $(*)$ ha quindi rango 3 (essendo A la matrice incompleta) indipendentemente da a, b e c. Possiamo dunque concludere che $(*)$ ha sempre un'unica soluzione e quindi $\mathcal{F}$ è suriettiva.

Si poteva arrivare alla stessa conclusione ricordando che il rango di A è uguale alla dimensione del sottospazio $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ di $\mathbb{R}^3$. Essendo tale rango 3, abbiamo che $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ coincide con $\mathbb{R}^3$, e quindi $\mathcal{F}$ è suriettiva. ∎

Esercizio 2 *Come l'*Esercizio 1, *con* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Abbiamo $\det(A) = 0$ e quindi il rango di A è minore di 3. La sottomatrice 2×2 di A ricavata dalle prime due righe e prime due colonne ha determinante diverso da 0, e dunque A ha rango 2. Tale è anche la dimensione di $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$, da cui segue che $\mathcal{F}$ non è suriettiva (perché $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3).

I vettori che non appartengono a $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ sono i vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ per cui il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad (*)$$

non ha soluzioni. La matrice completa di questo sistema è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ -1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 & c \end{pmatrix}$ che tramite operazioni elementari può essere trasformata nella matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-a-b \end{pmatrix}$. Il sistema $(*)$ ha soluzioni se e solo se l'ultima riga di questa matrice è nulla. I vettori che non appartengono a $\mathrm{Im}(\mathcal{F})$ sono dunque i vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ tali che $c - a - b \neq 0$. ■

Esercizio 3 *Dire se la funzione lineare $\mathcal{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ rappresentata dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ nella base canonica è iniettiva, cioè se, dati due qualsiasi vettori $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, $\mathcal{F}(\mathbf{u}) \neq \mathcal{F}(\mathbf{v})$.*
In caso di risposta negativa, determinare due vettori $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, tali che $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{v})$.

Conviene ricordare le proprietà di una funzione lineare $\mathcal{G}$ non iniettiva. In tal caso abbiamo due vettori $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ tali che $\mathcal{G}(\mathbf{v}) = \mathcal{G}(\mathbf{u})$. Per linearità abbiamo anche $\mathcal{G}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = \mathbf{0}$; esiste cioè un vettore $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathcal{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. Se inversamente esiste un vettore $\mathbf{w}$ non nullo tale che $\mathcal{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$, allora, per linearità, $\mathcal{G}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathcal{G}(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v}$ e quindi $\mathcal{G}$ non è iniettiva.

Possiamo dunque concludere che $\mathcal{G}$ è iniettiva se e solo se esiste un vettore $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ tale che $\mathcal{G}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}$. In altri termini, $\mathcal{G}$ è iniettiva se e solo se il suo *nucleo* ($\mathrm{Ker}(\mathcal{G})$) è diverso dal vettore nullo.

Nel caso particolare considerato nell'esercizio, la funzione $\mathcal{F}$ è iniettiva se e solo se il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

ha solo la soluzione banale. Ciò succede se e solo se il rango di A è 3. Poiché $\det(A) = 0$, il rango di questa matrice è minore di 3 e quindi $\mathcal{F}$ non è iniettiva.

Per rispondere alla seconda parte della domanda, ricordando le considerazioni generali sulle funzioni non iniettive, basta considerare un vettore arbitrario $\mathbf{u}$, e aggiungere a questo una soluzione non banale $\mathbf{w}$ di $(*)$. In questo modo abbiamo $\mathbf{u} \neq \mathbf{u} + \mathbf{w}$, ma $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \mathcal{F}(\mathbf{u} + \mathbf{w})$. ■

Esercizio 4 *Come l'*Esercizio 3*, con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.*

In questo caso abbiamo $det(A) = -9$ e quindi $\mathcal{F}$ è iniettiva. ∎

Esercizio 5 *Determinare autovalori e autovettori della matrice* $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 4 & 3 & -4 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Gli autovalori di A si calcolano risolvendo l'*equazione caratteristica*

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -2 & 4 \\ 4 & 3-\lambda & -4 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

L'equazione $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$ può essere scritta come $\lambda^2(3-\lambda) - (3-\lambda) = 0$, che equivale a $(3-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1) = 0$.

Gli autovalori di A sono $3, -1, 1$. Poiché sono 3 autovalori distinti, gli autovalori corrispondenti saranno indipendenti e costituiranno una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice A è dunque diagonalizzabile.

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore 3 sono le soluzioni del sistema lineare

$$(A - 3\mathbb{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché l'ultima riga della matrice $A - 3\mathbb{I}_3$ è la somma delle altre due, abbiamo che questo sistema lineare è equivalente a $\begin{cases} -6x - 2y + 4z = 0 \\ 4x - 4z = 0 \end{cases}$. Posto $z = t$, l'insieme delle soluzioni è $\begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$. L'autospazio dell'autovalore 3 è quindi dato dati vettori della forma $t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed ha ovviamente dimensione 1.

In modo analogo si ricava che l'autospazio dell'autovalore -1 è l'insieme dei vettori della forma $t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, e che l'autospazio dell'autovalore 1 è l'insieme dei vettori della forma $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Come è stato già osservato, i vettori $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$. Se A è la matrice della funzione lineare $\mathcal{F}$ nella base canonica, la matrice di $\mathcal{F}$ nella base $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ è data da $S^{-1}AS$ dove $S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Deve risultare $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice diagonale formata dagli autovalori. ■

Esercizio 6 *Determinare autovalori e autovettori della matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

L'equazione caratteristica della matrice A è $\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = 0$, cioè $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0$. Abbiamo dunque che 1 è un autovalore con molteplicità algebrica 1, e 3 è un autovalore con molteplicità algebrica 2.

L'insieme degli autovettori dell'autovalore 1 (cioè il suo l'autospazio) è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$(A - \mathbb{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente al sistema lineare $\begin{cases} y = 0 \\ -x + z = 0 \end{cases}$ che ha come soluzione l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. L'autospazio dell'autovalore 1 è dunque il sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 1 generato dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

L'autospazio dell'autovalore 3 è dato dall'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$(A - 3\mathbb{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

che è equivalente alla singola equazione (in tre incognite!) $-x - y = 0$. Tale equazione è verificata per valori arbitrari di z e quando $x = -y$. L'insieme delle soluzioni è quindi costituito dai vettori $\begin{pmatrix} -t \\ t \\ \tau \end{pmatrix}$ $(t, \tau \in \mathbb{R})$. Tale insieme di vettori può essere scritto come $t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(t, \tau \in \mathbb{R})$ e costituisce un sottospazio di dimensione 2 di $\mathbb{R}^3$.

La matrice A è dunque diagonalizzabile. $\blacksquare$

Esercizio 7 *Determinare autovalori e autovettori della matrice* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Il determinante $\det(A - \lambda \mathbb{I}_2)$ vale $(3-\lambda)^2$. Quindi 3 è l'unico autovalore di A ed ha molteplicitè algebrica 2. Gli autovettori di A sono le soluzioni del sistema lineare $(A - 3\mathbb{I}_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ che equivale alla singola equazione (in due incognite!) $y = 0$. L'insieme degli autovettori di A è dunque l'insieme dei vettori della forma $\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbb{R})$. Si tratta di un sottospazio di dimensione 1 di $\mathbb{R}^2$ e dunque A non è diagonalizzabile (la dimensione geometrica dell'autovalore 3 è inferiore alla sua dimensione algebrica). $\blacksquare$

Esercizio 8 *Si verifichi che* $\lambda = 1$ *è un autovalore della matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ *formata da autovettori di* A.

L'equazione caratteristica di A è:

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 & 4 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 22\lambda - 24 = 0$$

Si verifica immediatamente che una delle soluzioni di tale equazione è $\lambda = 1$.

Sappiamo che possiamo rispondere alla seconda domanda perché la matrice A è simmetrica. Il primo passo per la determinazione di una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A trovare gli altri autovalori di A.

Dividendo il polinomio $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 22\lambda - 24$ per $\lambda - 1$ otteniamo $-\lambda^2 + 2\lambda + 24$. Le radici di questo polinomio sono $\lambda = 6$ e $\lambda = -4$ che sono quindi gli altri due autovalori di A.

Risolvendo i sistemi lineari

$$(A - \mathbb{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A - 6\mathbb{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A + 4\mathbb{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

troviamo gli autovettori di A. Abbiamo nell'ordine $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Questi vettori sono a due a due ortogonali e costituiscono quindi una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Una base ortonormale è formata da vettori a due a due ortogonali ed aventi lunghezza 1. Per ottenere una tale base, basta dividere $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ per il loro modulo:

$$\frac{\mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_1}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad \frac{\mathbf{v_2}}{|\mathbf{v_2}|} = \begin{pmatrix} \frac{5}{\sqrt{50}} \\ \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} \end{pmatrix} \qquad \frac{\mathbf{v_3}}{|\mathbf{v_3}|} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{\sqrt{50}} \\ \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{4}{\sqrt{50}} \end{pmatrix}$$

■

Esercizio 9 *Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori della matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$\det(A - \lambda \mathbb{I}_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) = 0$$

Abbiamo quindi che $\lambda = 2$ è un autovalore con molteplicità algebrica 2, e $\lambda = 4$ è un autovalore con molteplicità algebrica 1.

L'autospazio dell'autovalore 2 è dato dai vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che risolvono il sistema lineare $(A - 2\mathbb{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, equivalente all'unica equazione (in tre incognite!) $y - z = 0$.

Posto $z = t$ e $x = \tau$, l'insieme degli autovettori di 2 è $\left\{ \begin{pmatrix} \tau \\ t \\ t \end{pmatrix} : \tau, t \in \mathbb{R} \right\}$.

L'autospazio dell'autovalore 4 è dato dai vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che risolvono il sistema lineare $(A - 4\mathbb{I}_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, equivalente al sistema $\begin{cases} -4x = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$ le cui soluzioni sono $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$.

Osserviamo che ogni autovettore di 4 è ortogonale ad ogni autovalore di 2. Per avere una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A, possiamo scegliere un arbitrario autovettore di 4, per esempio $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e due autovettori ortogonali di 2, per esempio $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Come nel caso precedente una base ortonormale si ottiene dividendo ognuno di questi vettori per il proprio modulo:

$$\frac{\mathbf{v_1}}{|\mathbf{v_1}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \frac{\mathbf{v_2}}{|\mathbf{v_2}|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \frac{\mathbf{v_3}}{|\mathbf{v_3}|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

■