

# Interpretazione geometrica della derivata secondo una direzione

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Consideriamo una  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , essendo  $A$  un campo di  $\mathbb{R}^2$ . Per ipotesi  $f \in C^1(A)$  o, ciò che è lo stesso, è differenziabile in  $A$ . Sia  $\gamma$  una curva di livello di  $f$ , per cui  $\gamma$  ha equazione  $f(x, y) = C \in \mathbb{R}$ .

Iniziamo a dimostrare che il campo vettoriale gradiente di  $f$  è ortogonale alle curve di livello. A tale scopo prendiamo ad arbitrio un punto  $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$  tale che  $P_0$  non sia punto estremo per  $f$  (ciò implica  $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \neq (0, 0)$ ), per cui il gradiente in tale punto assume il valore:

$$\nabla f(P_0) = f_x(x_0, y_0) \mathbf{i} + f_y(x_0, y_0) \mathbf{j} \quad (1)$$

Asserire che  $\nabla f(P_0)$  è ortogonale a  $\gamma$  nel punto  $P_0$ , equivale a dire che  $\nabla f(P_0)$  è ortogonale alla retta tangente a  $\gamma$  in  $P_0$ . Dobbiamo perciò determinare il coefficiente angolare di tale retta. Riscriviamo l'equazione di  $\gamma$ :

$$f[x, y(x)] = C$$

Derivando ambo i membri rispetto a  $x$ :

$$\frac{d}{dx} f[x, y(x)] = 0,$$

cioè:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

da cui supponendo, senza perdita di generalità,  $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ :

$$y'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}, \quad (2)$$

che è il coefficiente angolare della retta tangente a  $\gamma$  in  $P_0$ . Da ciò segue che un vettore parallelo a tale retta è:

$$\tau_0 = \mathbf{i} - \frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} \mathbf{j} \quad (3)$$

A questo punto eseguiamo il prodotto scalare tra  $\tau_0$  e  $\nabla f(P_0)$ :

$$\tau_0 \cdot \nabla f(P_0) = 0, \quad (4)$$

e siccome i vettori sono entrambi non nulli, segue necessariamente  $\tau_0 \perp \nabla f(P_0)$ .

\*\*\*

Per ipotesi è  $f \in C^1(A)$ , quindi la derivata secondo una direzione  $n$  è:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla f, \quad (5)$$

essendo  $\mathbf{n} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j} + \nu \mathbf{k}$  il versore della direzione orientata  $n$ . Se indichiamo con  $\theta$  l'angolo tra i vettori  $\mathbf{n}, \nabla f$  si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = |\nabla f| \cos \theta \quad (6)$$

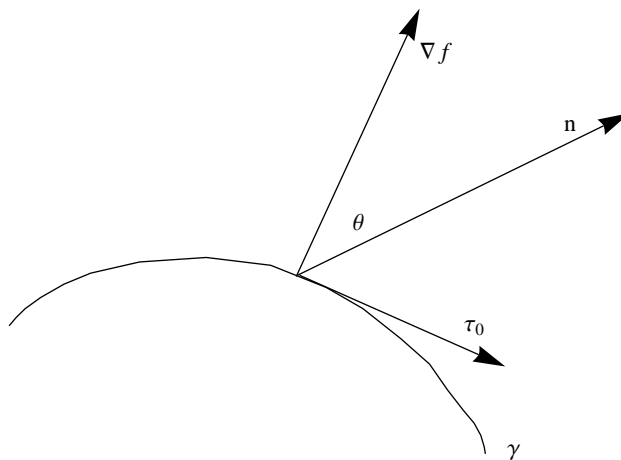


Figure 1:

In particolare, se la derivata direzionale è calcolata lungo la tangente  $\tau$  alla curva di livello, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0, \quad (7)$$

giacchè  $\tau \cdot \nabla f = 0$ .

Il risultato (7) è intuitivamente ovvio, poiché lungo la curva di livello la funzione è costante, per cui la derivata direzionale si annulla.

Il caso opposto è quello in cui la derivata direzionale viene calcolata nella direzione del gradiente, avendosi:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = |\nabla f| \quad (8)$$

Anche questo risultato è intuitivamente ovvio, poiché il vettore gradiente definisce la direzione orientata di massima velocità di variazione della funzione, per cui ci aspettiamo un valore massimo della derivata lungo tale direzione.

Osserviamo che tali risultati si generalizzano al caso di funzioni di  $n$  variabili  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . In tal caso abbiamo che il campo vettoriale gradiente di  $f$  è ortogonale alle ipersuperfici di livello  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = C$ .