Esercizio 1247

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Determinare l'incremento e il differenziale della funzione:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy$$

***

Soluzione
L'incremento è:

$$\begin{aligned}
\Delta f &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\
&= (x+\Delta x)^2 - (y+\Delta y)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y) - x^2 + y^2 - xy \\
&= (2x+y)\Delta x + x\Delta y + \Delta x^2 - \Delta y^2 + \Delta x \Delta y
\end{aligned}$$

Il differenziale totale:

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\
&= (2x+y)\, dx + x dy
\end{aligned}$$

Ma $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, per cui:

$$df = (2x+y)\Delta x + x\Delta y$$

Quindi:

$$\Delta f = df + \Delta x^2 - \Delta y^2 + \Delta x \Delta y,$$

dove $\Delta x^2 - \Delta y^2 + \Delta x \Delta y$ è un infinitesimo di ordine superiore a $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Esercizio 1248

Assegnata la funzione

$$f(x,y) = x^2 y,$$

determinare l'incremento Δf e il differenziale totale in $P(1,2)$, determinando poi $\Delta f - df$ per

$$(\Delta x, \Delta y) = \begin{cases} (1,2) \\ (0.1, 0.2) \end{cases}$$

***

Soluzione

$$\begin{aligned}\Delta f &= df + \left(2\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y\right)\\ df &= 4\Delta x + \Delta y\end{aligned}$$

Quindi:

$$\Delta f - df = 2\Delta x^2 + 2\Delta x\Delta y + \Delta x^2\Delta y = \begin{cases} 8, & (\Delta x, \Delta y) = (1,2) \\ 0.062, & (\Delta x, \Delta y) = (0.1, 0.2)\end{cases}$$

Esercizio 1249

Consideriamo un cono di altezza H e raggio di base R. Come è noto, il suo volume è:

$$V(R,H) = \frac{\pi}{3}R^2H$$

Determinare la variazione esatta del volume del cono per $\Delta R = -10^{-1}$ cm, $\Delta H = 3\cdot 10^{-1}$ cm. Utilizzando le proprietà del differenziale totale, calcolare poi la variazione esatta del volume.
Soluzione
Il differenziale totale della funzione $V(R,H)$ è:

$$dV = \frac{\pi}{3}R\left(2H\Delta R + R\Delta H\right)$$

Per $|\Delta R|, |\Delta H| \ll 1$:

$$\Delta V_{app} = \frac{\pi}{3}R\left(2H\Delta R + R\Delta H\right)$$

Prendiamo i valori numerici: $R = 10\,\text{cm}$ $\Delta R = -10^{-1}$ cm, $H = 30\,\text{cm}$, $\Delta H = 3\cdot 10^{-1}$ cm. Quindi:

$$\begin{aligned}\Delta V_{\alpha pp} &= -31.4\,\text{cm}^3\\ \Delta V_{esatto} &= -31.7\,\text{cm}^3\end{aligned}$$

Esercizio 1250

Sia $f(u,v)$ differenziabile in $A \subseteq \mathbb{R}^2$, con

$$u(x) = ax, \quad v(y) = by$$

Calcolare il differenziale totale di f.

***

Soluzione
Per la proprietà di invarianza, il differenziale totale è:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv$$

Esplicitando du e dv:

$$df = a\frac{\partial f}{\partial u}dx + b\frac{\partial f}{\partial v}dy$$

Esercizio 1282

Calcolare il differenziale totale del second'ordine della funzione:

$$f(x,y) = e^{xy} \tag{1}$$

***

Soluzione
Il differenziale totale secondo è dato da:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} dy^2 \tag{2}$$

Dobbiamo quindi calcolare le derivate parziali del second'ordine. Iniziamo a derivare la funzione:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y e^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x e^{xy}$$

Passiamo ora alle derivate seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{xy} + xy e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = x^2 e^{xy}$$

Sostituendo nella (2):

$$\begin{aligned} d^2 f &= e^{xy} \left[y^2 dx^2 + 2(1+xy) dx dy + x^2 dy^2 \right] \\ &= e^{xy} (y dx + x dy)^2 + 2 e^{xy} dx dy \end{aligned}$$

Esercizio 1301

Si calcoli il differenziale totale della funzione:

$$f(x,y) = x^3 y + x^2 y^2 + x y^3 \tag{3}$$

***

Soluzione
Il differenziale totale è dato da:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + 2xy^2 + y^3$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2y + 3xy^2$$

Qundi:

$$df = \left(3x^2y + 2xy^2 + y^3\right) dx + \left(x^3 + 2x^2y + 3xy^2\right) dy$$

Esercizio 1305

Calcolare il differenziale del secondo ordine della funzione:

$$f(x, y, z) = xyz$$

***

Soluzione
Innanzitutto calcoliamo il differenziale primo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz, \ \ \frac{\partial f}{\partial y} = xz, \ \ \frac{\partial f}{\partial z} = xy$$

Quindi:

$$df = yzdx + xzdy + xydz$$

Il differenziale secondo è il differenziale del differenziale primo, calcolato ritenendo costanti i differenziali delle variabili indipendenti:

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(df) = d(yz)\,dx + d(xz)\,dy + d(xy)\,dz \\ &= (zdy + ydz)\,dx + (zdx + xdz)\,dy + (xdy + ydx)\,dz \\ &= 2\,(xdydz + ydxdz + zxdy) \end{aligned}$$

Alternativamente si può calcolare sviluppando l'espressione formale:

$$d^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)^2,$$

che è un procedimento più laborioso di quello visto sopra.

Esercizio 1306

Se $f(\xi)$ è una funzione derivabile due volte, calcolare $d^2 f$ se $\xi = x^2 + y^2$

***

Soluzione
Per la proprietà di invarianza del differenziale:

$$df = f'(\xi)\, d\xi$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} d\xi &= \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \\ &= 2\,(xdx + ydy) \end{aligned}$$

Quindi il differenziale primo è:

$$df = 2f'(t)\,(xdx + ydy)$$

Ora possiamo calcolare il differenziale secondo, applicando le regole di differenziazione:

$$d^2 f = d\,(df) = 2df'\,(xdx + ydy) + 2f'(t)\, d\,(xdx + ydy)$$

Abbiamo:

$$df' = 2f''(t)\,(xdx + ydy)\,,$$

in quanto si calcola allo stesso modo del df. Inoltre:

$$d\,(xdx + ydy) = dx^2 + dy^2$$

Perciò:

$$d^2 f = 4f''(t)\,(xdx + ydy)^2 + 2f'(t)\,(xdx + ydy)$$

Esercizio 1307

Sia data una funzione $f(x, y)$ tale che passando a coordinate polari nel piano, la sua espressione contiene la sola variabile radiale. Determinare il differenziale totale del secondo ordine di tale funzione.

***

Soluzione
Le equazioni di trasformazione dalle coordinate cartesiane a quelle polari sono:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Per ipotesi la funzione dipende dalla sola variabile radiale, per cui è $f(r)$. Dalle equazioni di trasformazione si ottiene $r = \sqrt{x^2+y^2}$, per cui otteniamo la funzione composta $f[r(x,y)]$. Per la proprietà di invarianza del differenziale totale:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ si calcolano con la regola di derivazione delle funzioni composte, quindi otteniamo:

$$df = \frac{f'(r)}{r}(xdx + ydy)$$

Il differenziale totale secondo è:

$$d^2f = (xdx + ydy)\, d\left[\frac{f'(r)}{r}\right] + \frac{f'(r)}{r}\left(dx^2 + dy^2\right) \tag{4}$$

Calcoliamo $d\left[\frac{f'(r)}{r}\right]$

$$d\left[\frac{f'(r)}{r}\right] = \frac{rdf' - f'(r)\,dr}{r^2} = \frac{rdf' - df}{r^2}$$

Il differenziale df' si calcola allo stesso modo del df, per cui:

$$df' = \frac{f''(r)}{r}(xdx + ydy)$$

Ciò implica:

$$\begin{aligned} d\left[\frac{f'(r)}{r}\right] &= \frac{df'}{r} - \frac{df}{r^2} \\ &= \frac{f''(r)}{r^2}(xdx + ydy) - \frac{f'(r)}{r^2}(xdx + ydy) \end{aligned}$$

Sostituendo nella (4):

$$d^2f = \frac{f''(r) - f'(r)}{r^2}(xdx + ydy)^2 + \frac{f'(r)}{r}\left(dx^2 + dy^2\right)$$

Esercizio 1312

Determinare il differenziale totale del terz'ordine della funzione:

$$f(x,y) = e^x \cos y$$

***

Soluzione
Sviluppiamo l'espressione formale:

$$d^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3,$$

ottenendo:

$$d^3 = \frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3$$

Quindi:

$$d^3f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}dy^3$$

Determiniamo ora le derivate parziali del primo ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \cos y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -e^x \sin y \end{aligned}$$

Quelle del second'ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -e^x \cos y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= -e^x \sin y \end{aligned}$$

Quelle del terz'ordine:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} &= e^x \cos y \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = -e^x \sin y \\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = -e^x \cos y \\ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = e^x \sin y \end{aligned}$$

Quindi il risultato:

$$d^3f = e^x\left(\cos y dx^3 - 3\sin y dx^2dy - 3\cos y dxdy^2\right)$$

Esercizio 1313

Determinare df e $d^2 f$ per la funzione:

$$f(u,v) = u^v,$$

dove:

$$u(x,y) = \frac{x}{y}, \quad v(x,y) = xy$$

***

Soluzione
Abbiamo la funzione composta $f[u(x,y), v(x,y)]$ e per l'invarianza del differenziale totale:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du + \frac{\partial f}{\partial v}dv = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Calcoliamo le derivate parziali rispetto a x, y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\
&= vu^{v-1}\frac{1}{y} + u^v \ln u \cdot y \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\
&= vu^{v-1} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + u^v \ln u \cdot x
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
df &= u^v \left(\frac{v}{y} \cdot \frac{1}{u} + y \ln u\right) dx + u^v \left(-\frac{x}{y}\frac{v}{u} + x \ln u\right) dy \\
&= \left(\frac{x}{y}\right)^{xy} \left[y\left(1 + \ln\frac{x}{y}\right) dx + x\left(\ln\frac{x}{y} - 1\right) dy\right]
\end{aligned}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned}
1 + \ln\frac{x}{y} = \ln e + \ln\frac{x}{y} = \ln\frac{ex}{y} \\
\ln\frac{x}{y} - 1 = \ln\frac{x}{y} - \ln e = \ln\frac{x}{ey}
\end{aligned}$$

per cui:

$$df = \left(\frac{x}{y}\right)^{xy} \left[y \ln\left(\frac{ex}{y}\right) dx + x \ln\left(\frac{x}{ey}\right) dy\right]$$

Ora possiamo calcolare il differenziale totale secondo:

$$
\begin{aligned}
d^2 f = d\left(df\right) = \underbrace{d\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\right]}_{=df} & \left[y\ln\left(\frac{ex}{y}\right)dx + x\ln\left(\frac{x}{ey}\right)dy\right] \\
& + \left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left\{\ln\left(\frac{ex}{y}\right)dydx + ydxd\left[\ln\left(\frac{ex}{y}\right)\right] + \right. \\
& \left. + \ln\left(\frac{x}{ey}\right)dxdy + xdyd\left[\ln\left(\frac{x}{ey}\right)\right]\right.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo:

$$
\begin{aligned}
d\left[\ln\left(\frac{ex}{y}\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln\left(\frac{ex}{y}\right)\right]dx + \frac{\partial}{\partial y}\left[\ln\left(\frac{ex}{y}\right)\right]dy \\
&= \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} \\
d\left[\ln\left(\frac{x}{ey}\right)\right] &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\ln\left(\frac{x}{ey}\right)\right]dx + \frac{\partial}{\partial y}\left[\ln\left(\frac{x}{ey}\right)\right]dy \\
&= \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}
\end{aligned}
$$

Sostituendo nell'espressione del $d^2 f$:

$$
\begin{aligned}
d^2 f = & \left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left[y\ln\left(\frac{ex}{y}\right)dx + x\ln\left(\frac{x}{ey}\right)dy\right]^2 + \\
& + \left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left\{\ln\left(\frac{ex}{y}\right)dydx + ydxd\left[\ln\left(\frac{ex}{y}\right)\right] + \right. \\
& \left. + ydx\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) + xdy\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

Riordinando i vari termini:

$$
\begin{aligned}
d^2 f = & \left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left\{y^2\ln^2\left(\frac{ex}{y}\right)dx^2 + 2\left[xy\ln\left(\frac{ex}{y}\right)\ln\left(\frac{x}{ey}\right) + \ln\frac{x}{y}\right]dxdy \right. \\
& \left. + \left[x^2\ln^2\left(\frac{x}{ey}\right) - \frac{x}{y}\right]dy^2\right\}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1315

Determinare il differenziale totale del second'ordine della funzione:

$$
f\left(u, v\right) = u^v,
$$

dove:

$$u(x) = ax, \quad v(y) = by$$

***

Soluzione
Abbiamo la funzione composta $f[u(x), v(y)]$, quindi:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Calcoliamo le derivate parziali rispetto a x, y:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} = a\frac{\partial f}{\partial u} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = b\frac{\partial f}{\partial v}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
df &= a\frac{\partial f}{\partial u}dx + b\frac{\partial f}{\partial v}dy \\
&= af_u[u(x), v(y)]\,dx + bf_v[u(x), v(y)]\,dy
\end{aligned}$$

Calcoliamoa $d^2 f$

$$\begin{aligned}
d^2 f &= d(df) \\
&= adf_u dx + bdf_v dy \\
&= a\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}dx + b\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}dy\right)dx + b\left(a\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}dx + b\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dy\right)dy \\
&= a^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}dx^2 + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}dxdy + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}dy^2
\end{aligned}$$

Esercizio 1316

Calcolare il differenziale totale del second'ordine di

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + \ln x - 2e^{x+y},$$

nel punto $(1, 2)$.

***

Soluzione
Il differenziale totale del second'ordine è:

$$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2$$

Calcoliamo le derivate parziali del primo ordine:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{1}{x} - 2e^{x+y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y - 2e^{x+y}$$

Le derivate parziali del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 - \frac{1}{x^2} - 2e^{x+y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 - 2e^{x+y}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -2e^{x+y}$$

Quindi

$$d^2f = \left(2 - \frac{1}{x^2} - 2e^{x+y}\right)dx^2 - 4e^{x+y}dxdy - 2\left(1 + e^{x+y}\right)dy^2$$