

Esercizio 259

[file scaricato da <http://www.extrabyte.info>]

Determinare l'incremento della funzione $f(x) = x^2$ relativo al punto x_0 e all'incremento $x - x_0$, nei seguenti casi:

1. $x_0 = 1, x = 2$
2. $x_0 = 1, x = 1.1$
3. $x_0 = 1, x = 1 + \xi$

Soluzione

Per definizione di incremento:

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2$$

Quindi:

1. $\Delta f = 3$
2. $\Delta f = 1.1^2 - 1 = 0.21$
3. $\Delta f = (1 + \xi^2) - 1 = 2\xi + \xi^2$

Esercizio 260

Determinare l'incremento della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ relativo al punto x_0 e all'incremento Δx , nei seguenti casi:

1. $x_0 = 0, \Delta x = 10^{-3}$
2. $x_0 = 8, \Delta x = -9$
3. $x_0 = a, \Delta x = \xi$

Soluzione

Per definizione di incremento:

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}$$

Quindi:

1. $\Delta f = 10^{-1}$
2. $\Delta f = -3$
3. $\Delta f = \sqrt[3]{a + \xi} - \sqrt[3]{a}$

Esercizio 261

Consideriamo le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax + b, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \\g(x) &= ax^2, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Determinare gli incrementi Δf e Δg , mostrando che Δf dipende solo dall'incremento della variabile indipendente Δx e non dal punto iniziale x_0

Soluzione

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\&= a(x_0 + \Delta x) + b - ax_0 - b \\&= a\Delta x,\end{aligned}$$

Quindi Δf non dipende da x_0 . Infatti essendo f una funzione lineare si ha che $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ è il coefficiente angolare della retta di equazione $y = ax + b$.

Nel caso di $g(x)$ invece:

$$\begin{aligned}\Delta g &= g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \\&= a(2x_0\Delta x + \Delta x^2)\end{aligned}$$

Esercizio 262

Determinare l'incremento e il rapporto incrementale delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x}, \quad (x_0 = 0, \Delta x = 10^{-4}) \\g(x) &= \ln x, \quad (x_0 = 10^5, \Delta x = -9 \cdot 10^{-4})\end{aligned}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\&= \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{aligned}\Delta f &= 10^{-2} \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= 10^2\end{aligned}$$

In maniera simile per la funzione $g(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta g &= g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \\ &= \ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right) \\ \frac{\Delta g}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{aligned}\Delta g &= -\ln 10 \\ \frac{\Delta g}{\Delta x} &= \frac{\ln 10}{9 \cdot 10^4}\end{aligned}$$

Esercizio 263

Determinare l'incremento e il rapporto incrementale delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{x}, \quad (x_0 = 0, \Delta x = 10^{-4}) \\ g(x) &= \ln x, \quad (x_0 = 10^5, \Delta x = -9 \cdot 10^{-4})\end{aligned}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \\ &= \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{aligned}\Delta f &= 10^{-2} \\ \frac{\Delta f}{\Delta x} &= 10^2\end{aligned}$$

In maniera simile per la funzione $g(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta g &= g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \\ &= \ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0) \\ &= \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right) \\ \frac{\Delta g}{\Delta x} &= \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x_0}\right)\end{aligned}$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\begin{aligned}\Delta g &= -\ln 10 \\ \frac{\Delta g}{\Delta x} &= \frac{\ln 10}{9 \cdot 10^4}\end{aligned}$$

Esercizio 264

Assegnata la funzione $f(x) = 2^x$ si determini l'incremento Δf e il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ relativo all'incremento $(x + \Delta x) - x$ della variabile indipendente.

Soluzione

L'incremento della funzione è:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= 2^{x+\Delta x} - 2^x \\ &= 2^x (2^{\Delta x} - 1)\end{aligned}$$

Il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2^x}{\Delta x} (2^{\Delta x} - 1)$$

Esercizio 265

Assegnata la parabola $y = f(x)$, essendo $f(x) = 2x - x^2$ si determini il coefficiente angolare della retta secante per i punti $P_0(x_0 = 1, f(x_0))$, $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

Determinare poi il limite per $\Delta x \rightarrow 0$ del coefficiente angolare

Soluzione

Il coefficiente angolare è dato da

$$\begin{aligned}m &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\ &= \frac{2(1 + \Delta x)^2 - (1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} \\ &= -\Delta x\end{aligned}$$

Quindi:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} m = 0 \tag{1}$$

Da un punto di vista geometrico, per $\Delta x \rightarrow 0$, la retta secante ruota intorno a P_0 per tendere alla retta di coefficiente angolare (1), la cui equazione è perciò data:

$$y = f(x_0) = 1$$

Esercizio 266

Sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, con $X = [a, b]$. Il rapporto incrementale relativo al punto a e all'incremento $b - a$ della variabile indipendente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (2)$$

definisce la *velocità media di variazione* della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. Ad esempio, se x è il tempo e $f(x)$ la distanza percorsa da un punto materiale, la (2) definisce la velocità media del punto materiale nell'intervallo di tempo $[a, b]$.

Determinare la velocità media se $f(x) = \sqrt{x}$ (cm) nell'intervallo di tempo (espresso in secondi) $[1, 3]$.

Soluzione

Risulta:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(4) - f(1)}{3} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \text{ s} \quad (3)$$

Quindi la velocità media del punto materiale è:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \simeq 0.366 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$$

Esercizio 267

Assegnata la funzione $f(x) = \ln x$ si determini l'incremento Δf e il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ relativo all'incremento $(x + \Delta x) - \Delta x$ della variabile indipendente.

Soluzione

L'incremento della funzione è:

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= \ln(x + \Delta x) - \ln x \\ &= \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \end{aligned}$$

Il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Esercizio 267

Assegnata la funzione $f(x) = \ln x$ si determini l'incremento Δf e il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ relativo all'incremento $(x + \Delta x) - \Delta x$ della variabile indipendente.

Soluzione

L'incremento della funzione è:

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= \ln(x + \Delta x) - \ln x \\ &= \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\end{aligned}$$

Il rapporto incrementale:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

Esercizio 268

Mostrare che le funzioni assegnate hanno derivata infinita nei punti indicati:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt[3]{x^2}, \quad x_0 = 0 \\ g(x) &= \sqrt[5]{x-1}, \quad x_0 = 1\end{aligned}$$

Soluzione

Calcoliamo la derivata destra e sinistra in x_0 :

$$\begin{aligned}f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty\end{aligned}$$

Per la funzione g :

$$\begin{aligned}g'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt[5]{(x-1)^4}} = +\infty \\ g'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt[5]{(x-1)^4}} = +\infty\end{aligned}$$

Quindi:

$$g'(0) = +\infty$$

Esercizio 269

Dimostrare che la funzione $f(x) = |\cos x|$ non è derivabile nei punti $x_k = \frac{2k+1}{2}\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Soluzione

Calcoliamo la derivata sinistra e destra in x_k :

$$f'_-(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_k + \Delta x) - f(x_k)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\cos(x_k + \Delta x)|}{\Delta x}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \cos(x_k + \Delta x) &= \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \Delta x\right) \\ &= \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos \Delta x - \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \Delta x \\ &= -\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \Delta x \\ &= (-1)^{k-1} \sin \Delta x \end{aligned}$$

Quindi

$$\cos(x_k + \Delta x) = |\sin \Delta x|$$

Perciò:

$$f'_-(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -1$$

In maniera simile per la derivata destra:

$$f'_+(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\cos(x_k + \Delta x)|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = +1$$

Si conclude che la $|\cos x|$ non è derivabile nei punti $x_k = \frac{2k+1}{2}\pi$, avendosi $f'_+(x_k) \neq f'_-(x_k)$.

Esercizio 270

Dimostrare che la funzione $f(x) = |\cos x|$ non è derivabile nei punti $x_k = \frac{2k+1}{2}\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Soluzione

Calcoliamo la derivata sinistra e destra in x_k :

$$f'_-(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_k + \Delta x) - f(x_k)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\cos(x_k + \Delta x)|}{\Delta x}$$

Osserviamo che:

$$\begin{aligned} \cos(x_k + \Delta x) &= \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} + \Delta x\right) \\ &= \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos \Delta x - \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \Delta x \\ &= -\sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \sin \Delta x \\ &= (-1)^{k-1} \sin \Delta x \end{aligned}$$

Quindi

$$\cos(x_k + \Delta x) = |\sin \Delta x|$$

Perciò:

$$f'_-(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = -1$$

In maniera simile per la derivata destra:

$$f'_+(x_k) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\cos(x_k + \Delta x)|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\sin \Delta x|}{\Delta x} = +1$$

Si conclude che la $|\cos x|$ non è derivabile nei punti $x_k = \frac{2k+1}{2}\pi$, avendosi $f'_+(x_k) \neq f'_-(x_k)$.

Esercizio 271

Applicando le regole di derivazione, determinare la derivata delle funzioni

$$f(x) = \ln(\sin 2x)$$

$$g(x) = \frac{\ln x}{\arctan x}$$

Soluzione

$$f'(x) = \frac{1}{\sin 2x} \cdot 2 \cos 2x = 2 \cot 2x$$

La derivata della funzione g :

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \arctan x - \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln x}{(\arctan x)^2}$$

$$= \frac{(1+x^2) \arctan x - x \ln x}{(\arctan x)^2}$$

Esercizio 272

Applicando le regole di derivazione, determinare la derivata delle funzioni

$$f(x) = \ln(\sin x^2)$$

$$g(x) = \sin(\ln x^2)$$

Soluzione

$$f'(x) = \frac{1}{\sin x^2} \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cot x^2$$

La derivata della funzione g :

$$g'(x) = \cos(\ln x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \cos(\ln x^2)$$

Esercizio 273

Studiare la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)}, & \text{se } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ \sqrt{x} - \frac{1}{x-2}, & \text{se } x \in (0, 2) \end{cases},$$

nei punti $x_0 = 0$, $x'_0 = 2$.

Soluzione

Studiamo prima la continuità in tali punti.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x(x-2)} = 0 = f(0) \implies f \text{ è continua a sinistra in } x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{2},$$

Quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x(x-2)} = 0 = f(2) \implies f \text{ è continua a destra in } x'_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x-2} \right) = +\infty,$$

Quindi $x'_0 = 2$ è una singolarità. Si conclude che f non è derivabile in x_0 , x'_0 . Tuttavia, siccome è continua a sinistra in x_0 e a destra in x'_0 , possiamo calcolare le derivate sinistra e destra nei rispettivi punti:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{|x|} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = -\infty \end{aligned} \quad (4)$$

Quindi il diagramma “arriva” nel punto $(0,0)$ con tangente verticale e orientata verso il basso.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = +\infty \end{aligned} \quad (5)$$

$f'_+(0) = +\infty$ significa che il diagramma “parte” dal punto $(0, \frac{1}{2})$ con tangente verticale e orientata verso l'alto.

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = +\infty \end{aligned} \quad (6)$$

$f'_+(2) = +\infty$ significa che il diagramma “parte” dal punto $(2, 0)$ con tangente verticale e orientata verso l'alto.

Esercizio n. 273

<http://www.extrabyte.info>

Studiare la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)}, & \text{se } x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty) \\ \sqrt{x} - \frac{1}{x-2}, & \text{se } x \in (0, 2) \end{cases},$$

nei punti $x_0 = 0$, $x'_0 = 2$.

Soluzione

Studiamo prima la continuità in tali punti.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x(x-2)} = 0 = f(0) \implies f \text{ è continua a sinistra in } x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{2},$$

Quindi $x_0 = 0$ è un punto di discontinuità di prima specie.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x(x-2)} = 0 = f(2) \implies f \text{ è continua a destra in } x'_0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x-2} \right) = +\infty,$$

Quindi $x'_0 = 2$ è una singolarità. Si conclude che f non è derivabile in x_0 , x'_0 . Tuttavia, siccome è continua a sinistra in x_0 e a destra in x'_0 , possiamo calcolare le derivate sinistra e destra nei rispettivi punti:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{|x|} = - \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = -\infty \end{aligned} \quad (7)$$

Quindi il diagramma “arriva” nel punto $(0, 0)$ con tangente verticale e orientata verso il basso.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{x-2}{x}} = +\infty \end{aligned} \quad (8)$$

$f'_+(0) = +\infty$ significa che il diagramma “parte” dal punto $(0, \frac{1}{2})$ con tangente verticale e orientata verso l'alto.

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x(x-2)}}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x}{x-2}} = +\infty \end{aligned} \quad (9)$$

$f'_+(2) = +\infty$ significa che il diagramma “parte” dal punto $(2, 0)$ con tangente verticale e orientata verso l'alto.

Esercizio 274

Provare che $P_0(1, 0)$ è un punto angoloso del diagramma cartesiano della funzione:

$$f(x) = |\ln x|, \quad (10)$$

Soluzione

Esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & \text{se } x \in [1, +\infty) \\ -\ln x, & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases} \quad (11)$$

Quindi la derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se } x \in [1, +\infty) \\ -\frac{1}{x}, & \text{se } x \in (0, 1) \end{cases} \quad (12)$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= +1 \\ f'_-(1) &= -1 \end{aligned} \quad (13)$$

Allo stesso risultato si arriva calcolando il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x - 1} = +1 \\ f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x - 1} = -1 \end{aligned} \quad (14)$$

Da ciò vediamo che $P_0(1, 0)$ è un punto angoloso. La retta tangente τ_+ a destra in x_0 ha equazione:

$$y = x - 1$$

mentre la retta tangente τ_- a sinistra in x_0 ha equazione:

$$y = -x + 1$$

Il grafico è riportato in fig. (1)

Esercizio 275

Stabilire se la curva $y = |x + 4|$ è dotata di retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = -4$.

Soluzione

Esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{se } x \geq -4 \\ -(x + 4), & \text{se } x < -4 \end{cases} \quad (15)$$

Quindi la derivata prima:

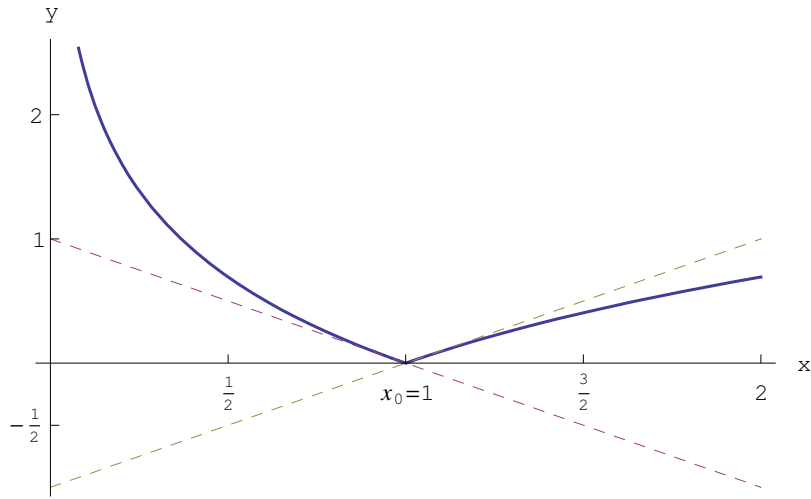


Figure 1: Grafico di $f(x) = |\ln x|$

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq -4 \\ -1, & \text{se } x < -4 \end{cases} \quad (16)$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned} f'_+(-4) &= +1 \\ f'_-(-4) &= -1 \end{aligned} \quad (17)$$

Si conclude che la curva assegnata è priva di retta tangente in $P_0(-4, 0)$, essendo questo un punto angoloso. La retta tangente τ_+ a destra in x_0 ha equazione:

$$y = x + 4$$

mentre la retta tangente τ_- a sinistra in x_0 ha equazione:

$$y = -x - 4$$

Esercizio 276

Studiare la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+1)}{3x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

nel punto $x_0 = 0$.

Soluzione

Studiamo il comportamento di f in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 1}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{\sin 1}{0^-} = -\infty \quad (18)$$

Quindi la funzione ha una singolarità in x_0 , per cui non ivi derivabile. L'espressione della derivata è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x \cos(x^2 + 1) \cdot 3x - 3 \sin(x^2 + 1)}{9x^2} \\ &= \frac{2x^2 \cos(x^2 + 1) - \sin(x^2 + 1)}{3x^2} \end{aligned}$$

Esercizio 277

Determinare la derivata della funzione:

$$f(x) = \arctan \left[\ln \left(\frac{1}{1+x^2} \right) \right]$$

Soluzione

Applicando le regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \ln^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right)} \cdot (1+x^2) \cdot \left[-\frac{2x}{(1+x^2)^2} \right] \\ &= -\frac{2x}{(1+x^2) \left[1 + \ln^2\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \right]} \end{aligned}$$

Esercizio 278

Determinare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x - 2}$$

Soluzione

Applicando le regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x}{x^2+1} \cdot (x-2) - \ln(x^2+1)}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2x(x-2) - (x^2+1)\ln(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = \frac{2x^2 [2 - \ln(x^2 + 1)] - 4x - \ln(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x - 2)^2}$$

Esercizio 279

Determinare la derivata della funzione:

$$f(x) = \frac{(2x+3)\ln x}{e^x}$$

Soluzione

Applicando le regole di derivazione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2\ln x + \frac{2x+3}{x})e^x - (2x+3)\ln x}{x^2 e^x} \\ &= \frac{2x\ln x + 2x + 3 - x(2x+3)\ln x}{(x^2+1)(x-2)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = \frac{2x+3-x\ln x(2x+1)}{(x^2+1)(x-2)^2}$$

Esercizio 280

Determinare la derivata della funzione:

$$f(x) = (\sin x)^{\sin x} - \sin(\sin x)$$

Soluzione

Per semplificare i calcoli, poniamo:

$$g(x) = (\sin x)^{\sin x},$$

per cui:

$$f'(x) = g'(x) - \cos x \cdot \cos(\sin x)$$

Per determinare $g'(x)$ applichiamo il metodo della derivata logaritmica:

$$\ln g(x) = \sin x \ln \sin x$$

Derivando ambo i membri:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} = \cos x \cdot \ln(\sin x) + \cos x,$$

Quindi:

$$g'(x) = (\sin x)^{\sin x} \cos x [\ln(\sin x) + 1]$$

La derivata di f :

$$f'(x) = \left\{ (\sin x)^{\sin x} [\ln(\sin x) + 1] + 1 \right\} \cos x$$

Esercizio 281

Determinare l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & \text{se } x \geq 0 \\ |1+x| - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R}$. Il punto di raccordo è $x = 0$. Studiamo il comportamento in tale punto.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(1+x) = 0 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(|1+x| - 1) = 0 \end{aligned}$$

Da ciò segue che la funzione è continua nel punto di raccordo $x = 0$. Inoltre $\ln(1+x)$ è continua per $x > -1$, e $|1+x| - 1$ è continua in \mathbb{R} , si conclude che la funzione assegnata è continua in \mathbb{R} .

Per l'insieme di derivabilità, esplicitiamo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x \in [-1, 0) \\ -x - 1, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

Quindi la derivata è:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 1, & \text{se } x \in [-1, 0) \\ -1, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

Da ciò vediamo che $x_0 = -1$ è un punto angoloso. Infatti:

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= +1 \\ f'_-(-1) &= -1 \end{aligned}$$

In figura (2) è riportato il diagramma cartesiano della funzione.

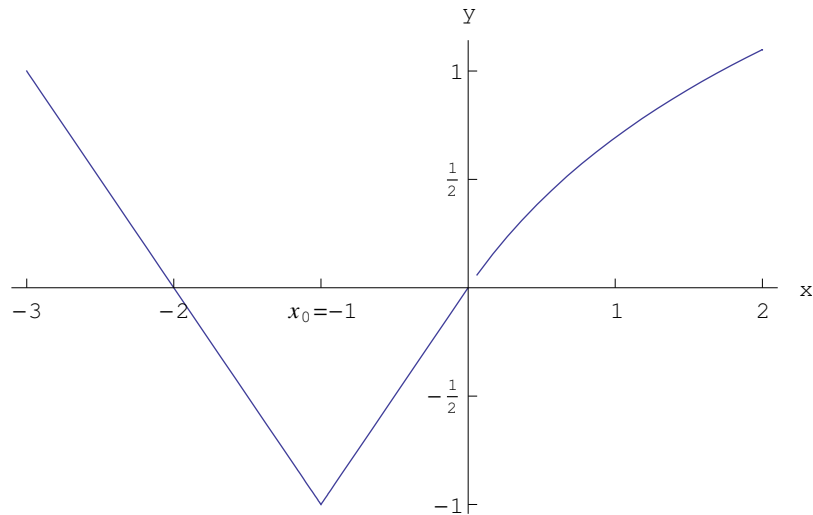


Figure 2: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & \text{se } x \geq 0 \\ |1+x| - 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Esercizio 282

Utilizzando le regole di derivazione, determinare la derivata della funzione

$$f(x) = \tan(\ln \sqrt{1-2x})$$

Soluzione

La funzione può essere scritta come:

$$f(x) = \tan \left[\frac{1}{2} \ln(1-2x) \right]$$

Per la regole di derivazione:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 \left[\frac{1}{2} \ln(1-2x) \right]} \cdot \frac{1}{1-2x} \cdot (-1)$$

Quindi la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{1}{(2x-1) \cos^2(\ln \sqrt{1-2x})}$$

Esercizio 283

Utilizzando le regole di derivazione, determinare la derivata della funzione

$$f(x) = \cos \sqrt{\tan x}$$

Soluzione

Per la regola di derivazione:

$$f'(x) = -\sin \sqrt{\tan x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

Quindi la derivata prima:

$$f'(x) = -\frac{\sin \sqrt{\tan x}}{2 \cos^2 x \sqrt{\tan x}}$$

Esercizio 284

Determinare l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione:

$$f(x) = \sinh(\ln^2 x)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$ e tale è l'insieme di continuità.

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte:

$$f'(x) = \cosh(\ln^2 x) \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

Quindi la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{2}{x} \ln x \cosh(\ln^2 x)$$

Da ciò segue che l'insieme di derivabilità è $X' = (0, +\infty)$. Studiamo il comportamento di f e della derivata in un intorno destro di $x = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \sinh(+\infty) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \frac{(-\infty)(+\infty)}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

Esercizio 285

Determinare l'insieme di continuità e l'insieme di derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - 3 \arctan x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R}$. Per determinare l'insieme di continuità osserviamo che le funzioni $x^3 - 3x + 1$, $1 - 3 \arctan x$, sono continue ovunque, per cui non ci resta che esaminare la continuità nel punto $x_0 = 0$. Abbiamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^3 - 3x + 1) = 1 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - 3 \arctan x) = 1,\end{aligned}$$

donde la funzione è continua in x_0

Passiamo alla derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3, & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{3}{1+x^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La derivata destra e sinistra in x_0 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 - 3) = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= -3 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+x^2} = -3\end{aligned}$$

Da ciò segue che la funzione è derivabile in $x_0 = 0$, avendosi $f'(0) = -3$. Si conclude che l'insieme di continuità e derivabilità è tutto \mathbb{R} .

Esercizio 286

Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente funzione è continua e derivabile in $(0, +\infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x-1} - 1}{x \sin(x^2 - 1)}, & \text{se } x \in (0, 1) \\ ax + b, & \text{se } x \in [1, 2] \\ (x - 2)^2 \ln^2(x - 2), & \text{se } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

Soluzione

f è manifestamente continua in $(0, +\infty) - \{x_0, x'_0\}$, essendo $x_0 = 1$ e $x'_0 = 2$. Per imporre continuità e derivabilità su tutto $(0, +\infty)$ dobbiamo raccordare sia la funzione che la sua derivata nei punti x_0, x'_0 . Iniziamo con la funzione:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} - 1}{x \sin(x^2 - 1)} = \frac{0}{0}$$

Per rimuovere la forma indeterminata poniamo $t = x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{(t + 1) \sin[t(t + 2)]}$$

Con ovvio significato dei simboli:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \implies e^t - 1 \sim t, \text{ per } t \rightarrow 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin [t(t+2)]}{t(t+2)} = 1 \implies \sin [t(t+2)] \sim t(t+2), \text{ per } t \rightarrow 0$$

Quindi:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{e^t - 1}{(t+1) \sin [t(t+2)]} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{(t+1)t(t+2)} = \frac{1}{2}$$

Il limite a destra:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

Quindi:

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{in } x_0 = 1 \end{array} \right) \iff a + b = \frac{1}{2} \quad (19)$$

Nel punto $x'_0 = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)^2 \ln(x-2) = 0$$

Quindi:

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{in } x'_0 = 2 \end{array} \right) \iff 2a + b = 0 \quad (20)$$

Dalle (19)(20):

$$\left(\begin{array}{l} f \text{ è continua} \\ \text{in } x_0 = 1, x'_0 = 2 \end{array} \right) \iff a = -\frac{1}{2}, b = 1 \quad (21)$$

Passiamo alla derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\frac{e^{x-1}-1}{x \sin(x^2-1)} \right], & \text{se } x \in (0, 1) \\ -\frac{1}{2}, & \text{se } x \in [1, 2] \\ 2(x-2) \ln^2(x-2) + 2(x-2) \ln(x-2), & \text{se } x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

La derivata destra e sinistra in x'_0 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [2(x-2) \ln^2(x-2) + 2(x-2) \ln(x-2)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

Cioè per $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$ la funzione non è derivabile in x'_0 , ma è derivabile a sinistra e a destra (punto angoloso)

Quindi:

$$\begin{aligned} a = -\frac{1}{2}, b = 1 &\implies \left(f \text{ è continua in } (0, +\infty) \text{ ma non è ivi derivabile,} \right. \\ &\quad \left. \text{essendo derivabile in } X' \subset (0, +\infty) \mid x'_0 \notin X \right) \\ (a, b) \neq \left(-\frac{1}{2}, 1\right) &\implies (f \text{ non è continua e nè derivabile in } (0, +\infty)) \end{aligned}$$

Esercizio 287

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^n$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
2. $f(x) = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$, $a, b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$
3. $f(x) = (2a + 3bx)^2$, $a, b \in \mathbb{R}$
4. $f(x) = (3 + 2x^2)^4$
5. $f(x) = \frac{3}{56(2x-1)^7} - \frac{1}{24(2x-1)^6} - \frac{1}{40(2x-1)^3}$
6. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

Soluzione

1. $f'(x) = n(1 + 3x - 5x^2)^{n-1} (3 - 10x) = n(3 - 10x)(1 + 3x - 5x^2)^{n-1}$
2. $f'(x) = 3\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2 \cdot \frac{a}{c} = \frac{3a}{c} \left(\frac{ax+b}{c}\right)^2$
3. $f'(x) = 2(2a + 3bx) \cdot 3b = 6b(2a + 3bx)$
4. $f'(x) = 4(3 + 2x^2)^3 \cdot 4x = 16x(3 + 2x^2)^3$
5. $f'(x) = -\frac{21}{56}(2x-1)^{-8} \cdot 2 + \frac{1}{4}(2x-1)^{-7} + \frac{1}{8}(2x-1)^{-6} \cdot 2$
 $= -\frac{21}{28(2x-1)^8} + \frac{1}{2(2x-1)^7} + \frac{1}{4(2x-1)^6}$
 $= \frac{-21+28x-14+7(4x^2-4x+1)}{28(2x-1)^8}$
 $= \frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$
6. $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Esercizio 288

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt[3]{a + bx^3}$
2. $f(x) = \sqrt{(a^{2/3} - x^{2/3})^3}$
3. $f(x) = (3 - 2 \sin x)^5$
4. $f(x) = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x$
5. $f(x) = \sqrt{\cot x} - \sqrt{\cot \alpha}$

Soluzione

1. $f'(x) = \frac{d}{dx} (a + bx^3)^{1/3} = \frac{1}{3} (a + bx^3)^{-2/3} \cdot 3bx^2 = bx^2 (a + bx^3)^{-2/3}$
 $= \frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$
2. $f'(x) = \frac{d}{dx} (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} = \frac{3}{2} (a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} \cdot (-1) \cdot x^{-1/3}$
 $= -\frac{1}{x^3} (a^{2/3} - x^{2/3})^{1/2} = -\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}} - 1}$
3. $f'(x) = 5(3 - 2 \sin x)^4 \cdot (-2) \cdot \cos x = -10 \cos x (3 - 2 \sin x)^4$
4. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^4 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$
 $= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} + \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} = \frac{\cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x}{\cos^6 x} = \frac{1 - \tan^2 x + \tan^4 x}{\cos^2 x}$
5. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\cot x}} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{2 \sin^2 x \sqrt{\cot x}}$

Esercizio 289

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = 2x + 5 \cos^3 x$
2. $x(t) = \csc^2 t + \sec^2 t$
3. $f(x) = -\frac{1}{6(1-3 \cos x)^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$

Soluzione

- $$f'(x) = 2 + 15 \cos^2 x \cdot (-\sin x) = 2 - 15 \sin x \cos^2 x$$
$$= \frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$$
- $$x'(t) = \frac{d}{dt} (\sin t)^{-2} + \frac{d}{dt} (\cos t)^{-2} = -2 \frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{\sin^3 t \cos^3 t} = -\frac{2(\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t)}{\frac{1}{8} \sin^3 2t}$$
$$= -16 \frac{\cos 2t}{\sin^3 2t}$$
- $$f'(x) = -\frac{1}{6} \frac{d}{dx} (1 - 3 \cos x)^{-2} = \frac{\sin x}{(1 - 3 \cos x)^3}$$
- $$f'(x) = \frac{1}{3} \frac{d}{dx} (\cos x)^{-3} - \frac{d}{dx} (\cos x)^{-1} = -(\cos x)^{-4} \cdot (-\sin x) + (\cos x)^{-2} \cdot (-\sin x)$$
$$= \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$$

Esercizio 290

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte determinare la derivata delle seguenti funzioni:

- $$f(x) = \sqrt{\frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5}}$$
- $$f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$$
- $$f(x) = \sqrt{1 + \arcsin x}$$
- $$f(x) = \sqrt{\arctan x} - (\arcsin x)^2$$

Soluzione

- $$f'(x) = \frac{1}{2f(x)} \cdot \frac{3 \cos x + 2 \sin x}{5} = \frac{1}{10} (3 \cos x + 2 \sin x) \sqrt{\frac{5}{3 \sin x - 2 \cos x}}$$
$$= \frac{3 \cos x + 2 \sin x}{2\sqrt{15 \sin x - 10 \cos x}}$$
- $$f'(x) = \frac{d}{dx} (\sin x)^{2/3} + \frac{d}{dx} (\cos x)^{-3} = -2 \frac{\cos^4 t - \sin^4 t}{\sin^3 t \cos^3 t} = \frac{2}{3} (\sin x)^{-1/3} \cos x + 3 (\cos x)^{-4} \sin x$$
$$= \frac{2 \cos x}{3 \sqrt[3]{\sin x}} + \frac{3 \sin x}{\cos^4 x}$$
- $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \arcsin x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1 + \arcsin x)}}$$
- $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\arctan x}} \cdot \frac{1}{1+x^2} - 2 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{1-x^2} - 4(1+x^2) \arcsin x \sqrt{\arctan x}}{2(1+x^2)\sqrt{(1-x^2) \arctan x}}$$

Esercizio 291

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \frac{1}{\arctan x}$
2. $f(x) = \sqrt{xe^x + x}$
3. $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$
4. $f(x) = \sin 3x + \cos \frac{x}{5} + \tan \sqrt{x}$

Soluzione

1. $f'(x) = -(\arctan x)^{-2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{(1+x^2)(\arctan x)^2}$
2. $f'(x) = \frac{e^x + xe^x + 1}{2\sqrt{xe^x + x}} = \frac{(1+x)e^x + 1}{2\sqrt{xe^x + x}}$
3. $f'(x) = \frac{d}{dx} (2e^x - 2^x + 1)^{1/3} + \frac{5\ln^4 x}{x}$
 $= \frac{1}{3} (2e^x - 2^x + 1)^{-2/3} \cdot (2e^x - 2^x \ln 2) + \frac{5\ln^4 x}{x}$
 $= \frac{2e^x - 2^x \ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \frac{5\ln^4 x}{x}$
4. $f'(x) = 3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}$
 $= 3 \cos 3x - \frac{1}{5} \sin \frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$

Esercizio 292

Applicando la regola di derivazione delle funzioni composte determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 1) + \tan \frac{1}{x}$
2. $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$
3. $f(t) = \sin t \sin(t + \phi)$
4. $f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$
5. $f(x) = a \cot \frac{x}{a}$

Soluzione

1. $f'(x) = \cos(x^2 - 5x + 1) \cdot (2x - 5) + a \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{a}{x}\right)}$
 $= (2x - 5) \cos(x^2 - 5x + 1) - \frac{a}{x^2 \cos^2\left(\frac{a}{x}\right)}$
2. $f'(x) = -\sin(\alpha x + \beta) \cdot \alpha = -\alpha \sin(\alpha x + \beta)$
3. $f'(t) = \cos t \sin(t + \phi) + \sin t \cos(t + \phi) = \sin(2t + \phi)$
4. $f'(x) = \frac{-2 \sin 2x(1 - \cos 2x) - 2 \sin 2x(1 + \cos 2x)}{(1 - \cos 2x)^2}$
 $= \frac{-4 \sin 2x}{(1 - \cos 2x)^2} = \frac{-8 \sin x \cos x}{(1 - \cos^2 x + \sin^2 x)} = -\frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$
5. $f'(x) = a \cdot \frac{-1}{\sin^2 \frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{a}}$

Esercizio 293

Applicando la regole di derivazione delle funzioni composte determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \arcsin 2x$
2. $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
3. $f(t) = \arccos \sqrt{x}$
4. $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$
5. $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Soluzione

1. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$
2. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} \cdot (-2x^{-3}) = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$
3. $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$
4. $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2+1}$
5. $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}$

Esercizio 294

Applicando la regole di derivazione delle funzioni composte determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

2. $f(x) = 5e^{-x^2}$

3. $f(x) = \frac{1}{5x^2}$

4. $f(x) = x^2 10^x$

5. $f(t) = t \sin 2^t$

6. $f(x) = \arccos e^x$

7. $f(x) = \ln(2x + 7)$

8. $f(x) = \ln \sin x$

9. $f(x) = \ln(1 - x^2)$

10. $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$

11. $f(x) = \ln(e^x + 5 \sin x - 4 \arcsin x)$

Soluzione

1. $f'(x) = \frac{-1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x + 1+x}{(1-x)^2} = \frac{-1}{1+x^2}$

2. $f'(x) = 5 \cdot (-2x) e^{-x^2} = -10e^{-x^2}$

3. $f'(x) = \frac{d}{dx} \left(5^{-x^2}\right) = -2x 5^{-x^2} \ln 5$

4. $f'(x) = 2x \cdot 10^{2x} + x^2 \cdot 10^{2x} \cdot \ln 10 \cdot 2 = 2x 10^{2x} (1 + x \ln 10)$

5. $f'(t) = \sin 2^t + t \cdot (\cos t) \cdot 2^t \cdot \ln 2 = \sin 2^t + t 2^t (\ln 2) \cos 2^t$

6. $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-e^{2x}}} \cdot e^x = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

7. $f'(x) = \frac{2}{2x+7}$

8. $f'(x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$

9. $f'(x) = -\frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{x^2-1}$

10. $f'(x) = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \ln x - \frac{1}{x \ln x}$

11. $f'(x) = \frac{e^x + 5 \cos x - 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{e^x + 5 \sin x - 4 \arcsin x} = \frac{(e^x + 5 \cos x) \sqrt{1-x^2} - 4}{\sqrt{1-x^2} (e^x + 5 \sin x - 4 \arcsin x)}$

Esercizio 295

Applicando le regole di derivazione determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sin^3 5x \cos^2 \frac{x}{3}$
2. $f(x) = -\frac{11}{2(x-2)^2} - \frac{4}{x-2}$
3. $f(x) = \arctan(\ln x) + \ln(\arctan x)$
4. $f(x) = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$

Soluzione

1.
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \sin^2 5x \cdot 5 \cos 5x \cdot \cos^2 \frac{x}{3} + \sin^3 5x \cdot 2 \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot \left(-\sin \frac{x}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} \\ &= 15 \sin^2 5x \cos 5x \cos^2 \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \sin^3 5x \sin \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3} \\ &= 15 \sin^2 5x \cos 5x \cos^2 \frac{x}{3} - \frac{1}{3} \sin^3 5x \sin \frac{2x}{3} \end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{11}{2} \frac{d}{dx} (x-2)^{-2} - 4 \frac{d}{dx} (x-2)^{-1} \\ &= 11(x-2)^{-3} + 4(x-2)^{-2} \\ &= \frac{4x+3}{(x-2)^3} \end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} + \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} \end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}} + \frac{1}{2(\sqrt{x+x})} \end{aligned}$$

Esercizio 296

Applicando le regole di derivazione determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = -\frac{15}{4(x-3)^4} - \frac{10}{3(x-3)^3} - \frac{1}{2(x-3)^2}$
2. $f(x) = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$
3. $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$
4. $f(x) = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

Soluzione

$$\begin{aligned}
1. \quad f'(x) &= -\frac{15}{4} \frac{d}{dx} (x-3)^{-4} - \frac{10}{3} \frac{d}{dx} (x-3)^{-3} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x-3)^{-2} \\
&= \frac{15}{(x-3)^5} + \frac{10}{(x-3)^4} + \frac{1}{(x-3)^3} \\
&= \frac{x^2+4x-6}{(x-3)^5} \\
2. \quad f'(x) &= \frac{1}{8} \frac{d}{dx} \left[\frac{x^8}{(1-x^2)^4} \right] = \frac{1}{8} \cdot \frac{8x^7(1-x^2)^4 - x^8 \cdot 4 \cdot (1-x^2)^3 \cdot (-2x)}{(1-x^2)^8} \\
&= \frac{x^7}{(1-x^2)^5} \\
3. \quad f'(x) &= \frac{\frac{4x-2}{2\sqrt{2x^2-2x+1}} \cdot x - \sqrt{2x^2-2x+1}}{x^2} = \frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}} \\
4. \quad f'(x) &= \frac{1}{a^2} \frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a^2} \frac{\sqrt{a^2+x^2} - \frac{2x}{x\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}
\end{aligned}$$

Esercizio 297

Applicando le regole di derivazione determinare la derivata delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
1. \quad f(x) &= \frac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}} \\
2. \quad f(x) &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{16}{3}x^2\sqrt[6]{x} \\
3. \quad f(x) &= \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x} \\
4. \quad f(x) &= \frac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \frac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}
\end{aligned}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
1. \quad f'(x) &= \frac{1}{3} \frac{d}{dx} \frac{x^3}{(1+x^2)^{3/2}} = \frac{1}{3} \frac{3x^2(1+x^2)^{3/2} - x^3 \cdot \frac{3}{2}(1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x}{(1+x^2)^3} \\
&= \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}} \\
2. \quad f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2}x^{3/2} + \frac{18}{7}x^{7/6} + \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{16}{3}x^{13/6} \right) \\
&= x^{-1/3} + 3x^{1/6} + 3x^{2/3} + \frac{104}{9}x^{7/6} \\
&= \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x^2} + \frac{104}{9}x\sqrt[6]{x} \\
3. \quad f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{2}x^{3/2} + \frac{18}{7}x^{7/6} + \frac{9}{5}x^{5/3} + \frac{6}{13}x^{13/6} \right) \\
&= x^{-1/3} + 3x^{1/6} + 3x^{2/3} + x^{7/6} \\
&= \frac{1+3\sqrt{x}+3x+\sqrt{x^3}}{\sqrt[3]{x}} \\
&= \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4. \quad f'(x) &= \frac{1}{8} \frac{d}{dx} (1+x^3)^{8/3} - \frac{1}{5} \frac{d}{dx} (1+x^3)^{5/3} \\
&= x^2 (1+x^3)^{5/3} - x^2 (1+x^3)^{2/3} \\
&= x^5 \sqrt[3]{(1+x^2)^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 298

Applicando le regole di derivazione determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$
2. $f(x) = x^4 (a - 2x^3)^2$
3. $f(x) = \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^m$
4. $f(x) = \frac{9}{5(x+2)^5} - \frac{3}{(x+2)^4} + \frac{2}{(x+2)^3} - \frac{1}{2(x+2)^2}$

Soluzione

1.
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{4}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{1/4} = \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-3/4} \cdot \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2} \\
&= \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{3/4} \cdot \frac{1}{(x+2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}
\end{aligned}$$
2.
$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 (a - 2x^3)^2 + x^4 \cdot 2(a - 2x^3) \cdot (-6x^2) \\
&= 4x^3 (a - 2x^3) (a - 5x^3)
\end{aligned}$$
3.
$$\begin{aligned}
f'(x) &= m \left(\frac{a+bx^n}{a-bx^n}\right)^{m-1} \cdot \frac{bnx^{n-1} \cdot (a-bx^n) + bnx^{n-1} (a+bx^n)}{(a-bx^n)^2} \\
&= 2abmnx^{n-1} \frac{(a-bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}
\end{aligned}$$
4.
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{9}{5} \frac{d}{dx} (x+2)^{-5} - 3 \frac{d}{dx} (x+2)^{-4} + 2 \frac{d}{dx} (x+2)^{-3} - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (x+2)^{-2} \\
&= -\frac{9}{(x+2)^6} + \frac{12}{(x+2)^5} - \frac{6}{(x+2)^4} + \frac{1}{(x+2)^3} \\
&= \frac{x^3-1}{(x+2)^6}
\end{aligned}$$

Esercizio 299

Applicando le regole di derivazione determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = (a+x) \sqrt{a-x}$
2. $f(x) = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$
3. $g(y) = \sqrt[3]{y} + \sqrt{y}$

$$4. f(t) = (2t + 1)(3t + 2) \sqrt[3]{3t + 2}$$

$$5. g(y) = \frac{1}{\sqrt{2ay - y^2}}$$

$$6. f(x) = \ln(\sqrt{1 + e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1 + e^x} + 1)$$

Soluzione

$$1. f'(x) = \sqrt{a-x} + (a+x) \frac{(-1)}{2\sqrt{a-x}}$$

$$= \frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$$

$$2. f'(x) = \frac{1}{2f(x)} \cdot [(x+b)(x+c) + (x+a)(x+c) + (x+a)(x+b)]$$

$$= \frac{3x^2 + 2(a+b+c)x + bc + ac + ab}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$$

$$3. g'(y) = \frac{d}{dy} (y + \sqrt{y})^{1/3} = \frac{1}{3} (y + \sqrt{y})^{-2/3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$$

$$= \frac{1}{3} (y + \sqrt{y})^{-2/3} \cdot \frac{2\sqrt{y} + 1}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{2\sqrt{y} + 1}{6\sqrt{y}^3 \sqrt[3]{(y + \sqrt{y})^2}}$$

$$4. f'(t) = \sqrt[3]{3t+2} (6t+4+6t+3) + \frac{(2t+1)(3t+2)}{\sqrt[3]{(3t+2)^2}}$$

$$= \frac{2(21t^2 + 26t + 8)}{\sqrt[3]{(3t+2)^2}}$$

$$= \frac{2(3t+2)(7t+4)}{\sqrt[3]{(3t+2)^2}} = 2(7t+4) \sqrt[3]{3t+2}$$

$$5. g'(y) = \frac{d}{dy} (2ay - y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2} (2ay - y^2)^{-3/2} (2a - 2y)$$

$$= \frac{y-a}{\sqrt{(2ay-y^2)^3}}$$

$$6. f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^x-1}} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x+1}} \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}$$

$$= \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}} \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x-1}} - \frac{1}{\sqrt{1+e^x+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

Esercizio 300

Studiare la continuità e la derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Soluzione

La funzione assegnata è manifestamente continua in $\mathbb{R} - \{0\}$, quindi non ci resta che studiarne la continuità nel punto $x_0 = 0$. A tale scopo calcoliamo il limite sinistro e il limite destro:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (1 - x) = 1 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1,\end{aligned}$$

da ciò segue che f è continua in $x_0 = 0$

La derivata è:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ -e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

Quindi la funzione è derivabile in $\mathbb{R} - \{0\}$, e non ci resta che studiarne la derivabilità nel punto $x_0 = 0$.

la derivata sinistra e la derivata destra nel punto $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = -1,\end{aligned}$$

da ciò segue:

$$f'_-(0) = f'_+(0) = -1 = f'(0),$$

cioè la funzione è derivabile in $x_0 = 0$. Si conclude che la funzione è derivabile (quindi continua) in $(-\infty, +\infty)$.

N.B. Bastava studiare la derivabilità, poichè una funzione derivabile è necessariamente continua.

Esercizio 301

Calcolare il differenziale e l'incremento Δf della funzione

$$f(x) = \frac{x}{1-x}$$

Soluzione

La derivata è

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

da cui il differenziale:

$$df = \frac{dx}{(1-x)^2}$$

L'incremento:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{x + \Delta x}{1 - (x + \Delta x)} - \frac{x}{1 - x} = \frac{(1-x)(x + \Delta x) - x(1-x - \Delta x)}{(1-x)(1-x - \Delta x)} \\ &= \frac{\Delta x}{(1-x)(1-x - \Delta x)} \end{aligned}$$

Esercizio 302

Studiare la derivabilità in $x_0 = 0$ della funzione:

$$f(x) = \sqrt{\sin x^2} \quad (22)$$

Soluzione

Determiniamo innanzitutto l'insieme di definizione di f . A tale scopo osserviamo che tale funzione non è periodica. Infatti, se applichiamo la definizione di funzione periodica:

$$\exists T > 0 \mid f(x + kT) \equiv f(x), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

vediamo che:

$$\nexists T > 0 \mid \sin(x + kT)^2 \equiv \sin x^2, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

donde $f(x)$ non è periodica. La funzione è pari:

$$f(-x) \equiv f(x),$$

quindi il suo diagramma è simmetrico rispetto all'asse y .

Inoltre, deve essere:

$$\sin x^2 \geq 0 \quad (23)$$

Per risolvere la (23) poniamo $t = x^2$, quindi deve essere $\sin t \geq 0 \iff t \geq 2k\pi, t \leq (2k+1)\pi$, quindi ripristinando la variabile x :

$$\begin{aligned} x^2 - 2k\pi \geq 0 &\implies x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\infty, -\sqrt{2k\pi} \right] \cup \left[\sqrt{2k\pi}, +\infty \right) \\ x - (2k\pi + 1) \leq 0 &\implies x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\sqrt{(2k+1)\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Dalle (24) segue che l'insieme di definizione è:

$$\begin{aligned}
X &= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\sqrt{(2k+1)\pi}, -\sqrt{2k\pi} \right] \cup \left[\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi} \right] \right) \\
&= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} X_k,
\end{aligned}$$

essendo:

$$X_k = \left[-\sqrt{(2k+1)\pi}, -\sqrt{2k\pi} \right] \cup \left[\sqrt{2k\pi}, \sqrt{(2k+1)\pi} \right]$$

Per alcuni valori di k :

$$\begin{aligned}
k = 0, \quad X_0 &= \left[-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi} \right] \\
k = 1, \quad X_1 &= \left[-\sqrt{3\pi}, -\sqrt{2\pi} \right] \cup \left[\sqrt{2\pi}, \sqrt{3\pi} \right] \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

La derivata è:

$$f'(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

Si osservi che f' non è definita in $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x^2 \sqrt{\frac{x^2}{\sin x^2}} = 1 \\
f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos x^2 \sqrt{\frac{x^2}{\sin x^2}} = -1
\end{aligned}$$

Si conclude che f non è derivabile in $x = 0$, ma lo è a destra e a sinistra di tale punto. Quindi $O(0,0)$ è un punto angoloso del diagramma della funzione.

Esercizio 303

Studiare la derivabilità in $x_0 = 0$ della funzione:

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2} \right)$$

Soluzione

Per facilitare i calcoli, poniamo per definizione:

$$g(x) = \frac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2},$$

cosicchè:

$$f(x) = \arcsin g(x) \implies f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1 - g^2(x)}}$$

Calcoliamo $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{-4a^2x}{(a^2 + x^2)^2}$$

mentre:

$$\begin{aligned} 1 - g^2(x) &= 1 - \frac{(a^2 - x^2)^2}{(a^2 + x^2)^2} \\ &= \frac{4a^2x^2}{(a^2 + x^2)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = -\frac{x}{|x|} \frac{2a}{a^2 + x^2}$$

Si osservi che f' non è definita in $x = 0$:

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2a}{a^2 + x^2} = -\frac{2}{a} \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2a}{a^2 + x^2} = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

Si conclude che f non è derivabile in $x = 0$, ma lo è a destra e a sinistra di tale punto. Quindi $O(0,0)$ è un punto angoloso del diagramma della funzione. Le equazioni della retta tangente a destra e della retta tangente a sinistra sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} \tau_+) \quad y &= -\frac{2}{a}x + \frac{\pi}{2} \\ \tau_-) \quad y &= \frac{2}{a}x + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 304

Studiare la derivabilità e la continuità in $x_0 = 0$ della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (25)$$

Soluzione

La derivata è:

$$f'(x) = \frac{e^{1/x}(1+x) + x}{x(1+e^{1/x})^2}$$

Osserviamo che $f'(x)$ non è definita in $x = 0$, per cui calcoliamo la derivata a destra e a sinistra:

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}(1+x) + x}{x(1+e^{1/x})^2} = \frac{(+\infty) + 0}{0(1+(+\infty))^2} \quad (26)$$

Calcoliamo a parte il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1+e^{1/x})^2 = 0 \cdot \infty$$

A tale scopo eseguiamo il cambio di variabile $x = \frac{1}{t}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1+e^{1/x})^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1+e^t}{t} = +\infty$$

Quindi il limite (26) si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}(1+x) + x}{x(1+e^{1/x})^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Anche qui è conveniente eseguire il cambio di variabile $x = \frac{1}{t}$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}(1+x) + x}{x(1+e^{1/x})^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t(t+1) + 1}{(1+e^t)^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t(t+1)}{e^{2t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t+1}{e^t} = 0$$

Perciò la derivata destra è:

$$f'_+(0) = 0 \quad (27)$$

Passiamo alla derivata sinistra:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}(1+x) + x}{x(1+e^{1/x})^2} = \frac{0 \cdot (1+0) + 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Con il solito cambio di variabile:

$$f'_-(0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t(t+1) + 1}{(1+e^t)^2} = \frac{0 \cdot \infty + 1}{0}$$

Ma

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t(t+1) = 0 \cdot \infty = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t+1}{e^{-t}} = 0$$

Quindi:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t (t+1) + 1}{(1+e^t)^2} = \frac{0+1}{1} = 1$$

Perciò la derivata sinistra è:

$$f'_-(0) = 1 \tag{28}$$

Si conclude che la funzione non è derivabile in $x_0 = 0$, ma lo è a destra e a sinistra, per cui $P_0(x_0, f(x_0))$ è un punto angoloso del diagramma.

Riguardo alla continuità:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+e^{1/x}} = \frac{0}{1+0} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+e^{1/x}} = \frac{0}{1+(+\infty)} = 0 \end{aligned}$$

Cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0),$$

donde la funzione è continua in $x_0 = 0$.

Esercizio 305

Assegnata la funzione:

$$f(x) = e^{-x},$$

calcolare l'espressione analitica della funzione lineare: $f(0) + xf'(0)$.

Soluzione

La derivata è:

$$f'(x) = -e^{-x} \implies f'(0) = -1$$

Quindi

$$f(0) + xf'(0) = 1 - x$$

Esercizio 306

Assegnata le funzioni:

$$f(x) = 1 - x, \quad g(x) = 1 - \sin \frac{\pi x}{2}$$

calcolare $\frac{g'(1)}{f'(1)}$.

Soluzione

Calcoliamo la derivata:

$$g'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \implies g'(1) = 0$$
$$f'(x) = -1$$

Quindi

$$\frac{g'(1)}{f'(1)} = 0$$

Esercizio 307

Assegnata le funzioni:

$$f(x) = 1 - x, g(x) = 1 - \sin \frac{\pi x}{2}$$

calcolare $\frac{g'(1)}{f'(1)}$.

Soluzione

Calcoliamo la derivata:

$$g'(x) = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2} \implies g'(1) = 0$$
$$f'(x) = -1$$

Quindi

$$\frac{g'(1)}{f'(1)} = 0$$

Esercizio 308

Applicando le regole di derivazione, calcolare la derivata delle funzioni:

1. $f(x) = x\sqrt{x}$
2. $f(x) = \arcsin \sqrt[3]{x}$
3. $f(x) = \arcsin \ln x$
4. $f(x) = \frac{1}{3} \arcsin \sqrt{x}$
5. $f(x) = \arcsin x^2$

6. $f(x) = \cos \sqrt{x}$

7. $f(x) = \arctan e^x$

Soluzione

1. $f'(x) = \frac{d}{dx} x^{3/2} = \frac{3}{2} x^{1/2} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$

2. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}} \cdot \frac{1}{3} x^{2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}$

3. $f'(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$

4. $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{6\sqrt{x(1-x)}}$

5. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

6. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin \sqrt{x} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

7. $f'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}} \cdot e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Esercizio 309

Mostrare che la funzione $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ è soluzione dell'equazione differenziale $xy' = (1 - x^2)y$

Soluzione

Calcoliamo la derivata prima di $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$:

$$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} + x \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}} \right) = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Quindi:

$$xy' = (1 - x^2)y \iff xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3e^{-\frac{x^2}{2}} = xe^{-\frac{x^2}{2}} - x^3e^{-\frac{x^2}{2}},$$

donde l'asserto.

Esercizio 310

Dimostrare che il diagramma della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

è privo di retta tangente nel punto $(0,0)$.

Soluzione

Dimostriamo innanzitutto la continuità della funzione nel punto $x = 0$. A tale scopo osserviamo che:

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1 \implies \left(\forall x \in \mathbb{R}, \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| \right)$$

Quindi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon \in (0, \varepsilon] \mid x \in X, \quad |x| < \delta_\varepsilon \leq \varepsilon \implies \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \varepsilon,$$

cioè:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0)$$

Quindi la funzione assegnata è continua in $x = 0$.

Per quanto riguarda il diagramma cartesiano $\gamma) y = f(x)$, osserviamo che:

$$|f(x)| \leq |x| \implies \gamma \subset \mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < +\infty, -x \leq y \leq x\}$$

Cioè il diagramma è contenuto nella regione individuata dalle rette $y = x$ e $y = -x$. Inoltre:

$$f(x) = x \iff x \in X_1 = \left\{ x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset X$$
$$f(x) = -x \iff x \in X'_1 = \left\{ x'_k = \frac{2}{\pi(4k-1)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset X,$$

per cui γ è l'unione di archi di curva per i punti $P_k(x_k, x_k)$, $P'_k(x'_k, -x'_k)$. Da ciò segue che non è possibile tracciare il diagramma intorno all'origine, in quanto la funzione esibisce un comportamento oscillante compiendo infinite oscillazioni intorno al punto $x = 0$. È importante osservare che le oscillazioni *si smorzano intorno a* $x = 0$ (fig. (3)).

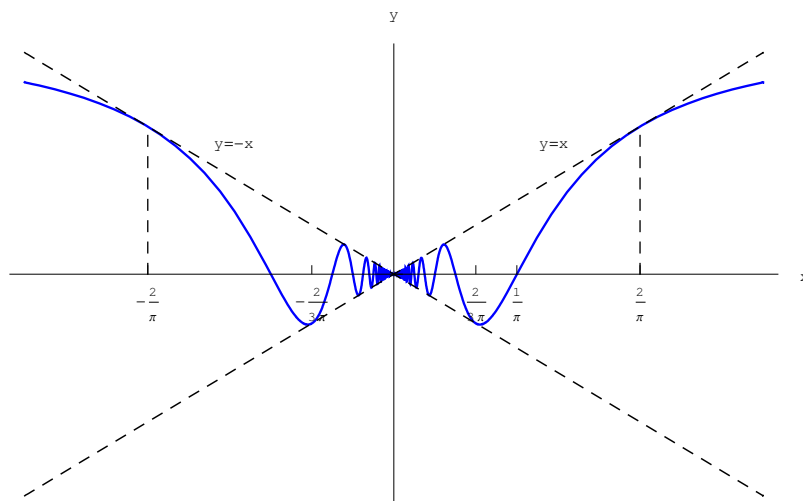


Figure 3: Diagramma cartesiano di $x \sin \frac{1}{x}$

Passiamo alla derivabilità in $x = 0$. A tale scopo applichiamo la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

Da ciò vediamo che il rapporto incrementale è non regolare in $x = 0$, giacchè $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$. Infatti, osserviamo innanzitutto che $g(x) \stackrel{def}{=} \sin \frac{1}{x}$ è definita in $X' = \mathbb{R} - \{0\}$. Studiamo il comportamento di g in un intorno di $\bar{x} = 0$. A tale scopo determiniamo i punti di X' in cui g assume il valore $+1$:

$$g(x) = 1 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x \stackrel{def}{=} x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cioè:

$$g(x) = 1 \iff x \in \Xi_1 = \left\{ x_k = \frac{2}{\pi(1+4k)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset X$$

Determiniamo poi i punti di X' in cui g assume il valore -1 :

$$g(x) = -1 \iff \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff x \stackrel{def}{=} x'_k = \frac{2}{\pi(4k-1)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Cioè:

$$g(x) = -1 \iff x \in \Xi'_1 = \left\{ x'_k = \frac{2}{\pi(4k-1)} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset X$$

Inoltre:

$$\bar{x} \in \mathcal{D}(\Xi_1) - \Xi_1, \mathcal{D}(\Xi_2) - \Xi_2$$

cioè $\bar{x} = 0$ è di accumulazione per entrambi gli insiemi. Inoltre, se prendiamo un intorno J_ε del punto $y = 0$ di raggio $\varepsilon < 1$, possiamo associare ad esso intorni di $x = 0$ in cui la funzione assume i valori $+1$ e -1 , in virtù del fatto che $x = 0$ è di accumulazione per gli insiemi X_1 e X'_1 . Quindi:

$$J_{\varepsilon < 1}(0) = (-\varepsilon, \varepsilon), I_{\delta_\varepsilon}(0) = (-\delta_\varepsilon, \delta_\varepsilon) \implies \exists x \in X' \cap I_{\delta_\varepsilon} \mid g(x) \notin J_\varepsilon \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(x),$$

Si conclude che $x = 0$ è una singolarità per il rapporto incrementale $g(x)$. Riguardo al diagramma cartesiano di $g(x)$, osserviamo che la curva γ' $y = g(x)$ in ogni intorno di $x = 0$ è l'unione di un numero infinito di archi per $P_k(x_k, 1)$ e $P'_k(x'_{k+1}, -1)$. Da ciò segue che non è possibile tracciare il diagramma intorno all'origine, in quanto la funzione esibisce un comportamento oscillante compiendo infinite oscillazioni che non si smorzano intorno a $x = 0$. Ciò è mostrato in fig. (4).

Quindi il rapporto incrementale per $x \rightarrow 0$, oscilla indefinitamente tra -1 e 1 . Perciò il diagramma della funzione assegnata è privo di retta tangente in $(0, 0)$. Più precisamente, consideriamo la retta secante s_x per i punti $(0, 0)$ e $P(x, f(x))$ con $x \neq 0$ (fig: 5). La sua equazione è:

$$y = mx,$$

essendo m il coefficiente angolare.

Evidentemente:

$$m = \tan \theta,$$

con:

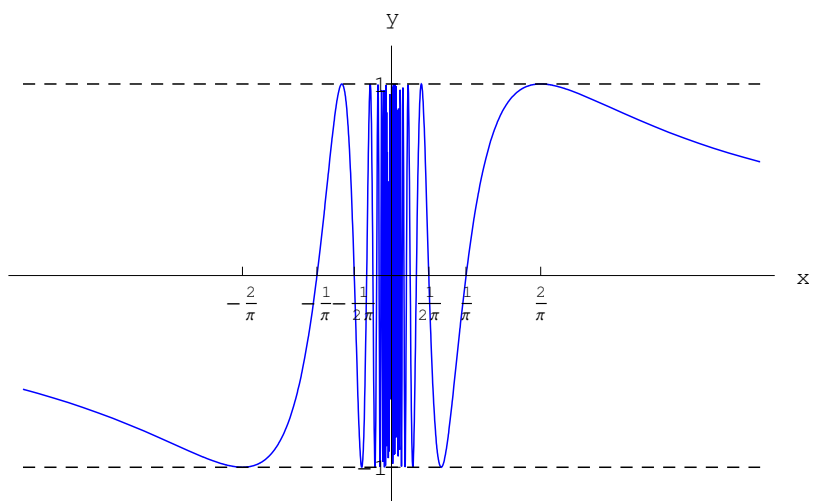


Figure 4: Diagramma cartesiano del rapporto incrementale

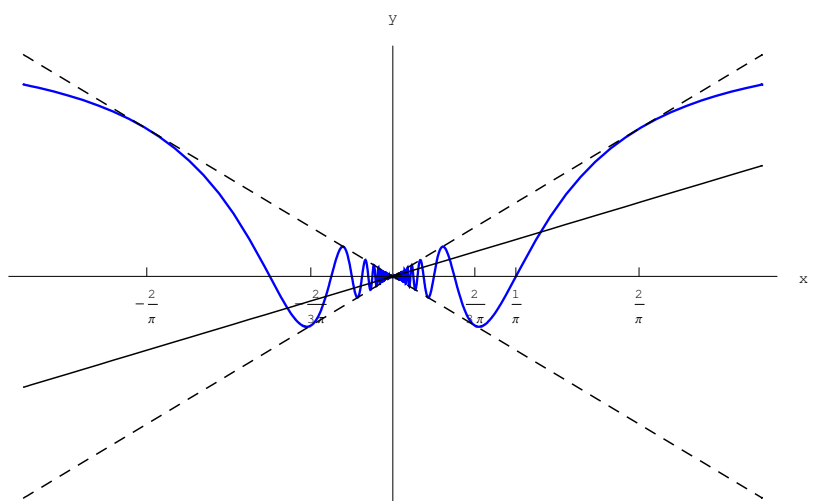


Figure 5: Retta secante a $y = f(x)$ per $(0,0)$ e $P(x, f(x))$.

$$\tan \theta(x) = \frac{f(x)}{x} = \sin \frac{1}{x}$$

Da ciò segue che per $x \rightarrow 0$, m oscilla indefinitamente tra -1 e 1 . Ciò implica che per $x \rightarrow 0$, la retta secante non tende ad alcun limite, poichè assume tutte e sole le posizioni comprese tra le rette $y = x$ e $y = -x$.

Esercizio 311

Dimostrare che il diagramma della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases},$$

è dotato di retta tangente nel punto $(0,0)$.

Soluzione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

Quindi il coefficiente della retta tangente a $\gamma) y = f(x)$ in $(0,0)$ è $m = 0$. Pertanto la retta tangente si identifica con l'asse delle ascisse.

Ciò è mostrato in fig.(6).

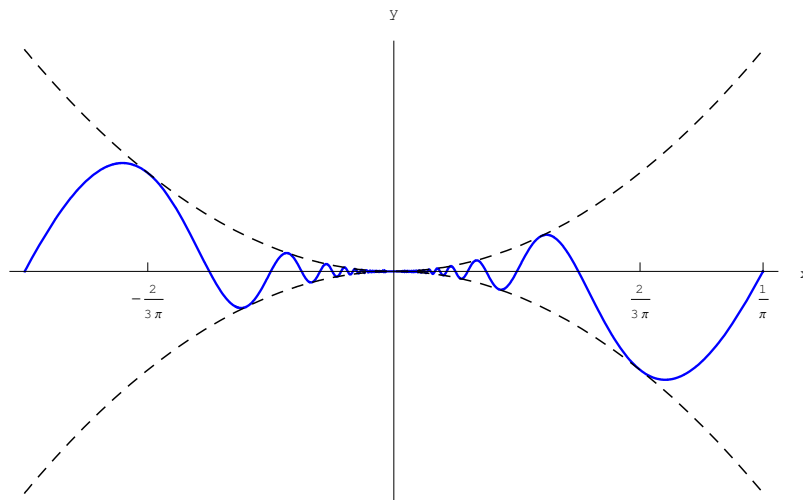


Figure 6: Diagramma cartesiano della funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$. La funzione compie infinite oscillazioni tra le curve $y = x^2$ e $y = -x^2$. Tali oscillazioni si smorzano per $x \rightarrow 0$. Il rapporto incrementale compie infinite oscillazioni tra le rette $y = x$ e $y = -x$. Tali oscillazioni si smorzano per $x \rightarrow 0$ e la retta secante tende alla posizione limite $y = 0$.

Osserviamo che la derivata della funzione assegnata è

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, \text{ se } x \neq 0$$

Da ciò segue che $x = 0$ è una discontinuità di seconda specie per $f'(x)$. Pertanto non è possibile calcolare $f'(0)$ dal limite:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f'(x),$$

giacchè tale limite non esiste. Per calcolare $f'(0)$ è necessario applicare la definizione di derivata in un punto (limite del rapporto incrementale). Il calcolo è reso possibile grazie all'espressione della funzione, resa continua in $x = 0$.

Esercizio 312

Verificare che il diagramma della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2},$$

ha nel punto $(0, 0)$ una cuspide (punto di regresso).

Soluzione

Applichiamo la definizione di derivata:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Questo limite non esiste, per cui calcoliamo la derivata sinistra e destra:

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

Si conclude che $(0, 0)$ è una cuspide o *punto di regresso*. Quest'ultima denominazione deriva dal fatto che se $\gamma) y = f(x)$ è la traiettoria di un punto materiale, si ha che quando il punto transita per la cuspide, il vettore velocità inverte il verso conservando la direzione.

Esercizio 314

Verificare che il punto $P_0(0, 1)$ è un punto angoloso per il diagramma della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{1+e^{1/x}}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Soluzione

Calcoliamo le derivate destra e sinistra nel punto $x = 0$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = 1$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{1/x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + (+\infty)} = 0$$

Quindi $P_0(0, 1)$ è un punto angoloso. Le equazioni delle rette tangenti a sinistra e a destra sono:

$$\tau_-) \quad y = 1 + f'_-(0)x = x + 1$$
$$\tau_+) \quad y = 1 + f'_+(0)x = 1$$

Esercizio 315

Verificare che il punto $(0, 0)$ è un punto angoloso per il diagramma della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Soluzione

Calcoliamo le derivate destra e sinistra nel punto $x = 0$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x} = \arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$
$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \arctan \frac{1}{x} = \arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$$

Quindi $(0, 0)$ è un punto angoloso. Le equazioni delle rette tangenti a sinistra e a destra sono:

$$\tau_-) \quad y - f(0) = f'_-(0)(x - 0) = -\frac{\pi}{2}x$$
$$\tau_+) \quad y - f(0) = f'_+(0)(x - 0) = \frac{\pi}{2}x$$

Esercizio 316

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = (x + 1)(2x + 1)(3x + 1)$

$$2. g(x) = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$$

Soluzione

$$1. \ln f(x) = \ln(x+1) + \ln(2x+1) + \ln(3x+1)$$

$$\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \frac{3}{3x+1}$$

$$\implies f'(x) = (2x+1)(3x+1) + 2(x+1)(3x+1) + 3(x+1)(2x+1)$$

$$2. \ln g(x) = \ln(x+2)^2 - \ln[(x+1)^3(x+3)^4]$$

$$\implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3} = \frac{2(x+1)(x+3) - 3(x+2)(x+3) - 4(x+2)(x+1)}{(x+2)(x+1)(x+3)}$$

$$= -\frac{5x^2+19x+20}{(x+2)(x+1)(x+3)} \implies g'(x) = -\frac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$$

Esercizio 317

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata delle seguenti funzioni:

$$1. f(x) = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$$

$$2. f(x) = x^3 \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

$$3. f(x) = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$$

$$4. f(x) = x^x$$

Soluzione

$$1. \ln f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x(x-1)}{x-2} = \frac{1}{2} [\ln(x^2-x) - \ln(x-2)]$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{x^2-x} - \frac{1}{x-2} \right) = \frac{1}{2} \frac{(2x-1)(x-2) - x^2 + x}{(x-2)(x^2-x)}$$

$$\implies f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2-x}{x-2}} \frac{x^2-4x+2}{(x-2)(x^2-x)} = \frac{x^2-4x+4}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$$

$$2. \ln f(x) = \ln x + \frac{1}{3} \ln \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right) = \ln x + \frac{2}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln(x^2+1)$$

$$\implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} + \frac{2}{3x} - \frac{2x}{3(x^2+1)} = \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)}$$

$$\implies f'(x) = \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$$

$$\begin{aligned}
3. \ln f(x) &= 9 \ln(x-2) - \frac{1}{2} \ln[(x-1)^5(x-3)^{11}] \\
&= 9 \ln(x-2) - \frac{1}{2} [5 \ln(x-1) + 11 \ln(x-3)] \\
&= 9 \ln(x-2) - \frac{5}{2} \ln(x-1) - \frac{11}{2} \ln(x-3) \\
\implies \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{9}{x-2} - \frac{5}{2(x-1)} - \frac{11}{2(x-3)} \\
&= \frac{18(x-1)(x-3) - 5(x-2)(x-3) - 11(x-1)(x-2)}{2(x-1)(x-2)(x-3)} \\
&= \frac{x^2 - 7x + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)} \\
\implies f'(x) &= \frac{(x^2 - 7x + 1)(x-2)^8}{(x-1)(x-3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}
\end{aligned}$$

Esercizio 318

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$$

Soluzione

$$\begin{aligned}
\ln f(x) &= \ln \sqrt{x-1} - \ln \left[\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3} \right] \\
&= \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{2}{3} \ln(x+2) - \frac{3}{2} \ln(x+3) \\
\implies \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} \\
&= -\frac{5x^2 + x - 24}{3(x-1)(x+2)(x+3)}
\end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = -\frac{5x^2 + x - 24}{3(x-1)(x+2)(x+3)} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$$

Esercizio 319

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{x^2} \\
g(x) &= \sqrt{x}
\end{aligned}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = \ln x^{x^2} = x^2 \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = 2x \ln x + x$$

Quindi:

$$f'(x) = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$$

Per la funzione $g(x)$:

$$\ln g(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x} \implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Quindi:

$$g'(x) = x^{1/x} \frac{1 - \ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x) = \sqrt[x]{x^{1-2x}} (1 - \ln x)$$

Equivalentemente:

$$g'(x) = \sqrt[x]{x} \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Esercizio 320

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = \sqrt{x} \ln x \implies \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}}$$

Quindi:

$$f'(x) = x^{\sqrt{x}} \frac{\ln x + 2}{2\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} \frac{\ln x + 2}{2}$$

Esercizio 321

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = x^{x^x}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = x^x \ln x \quad (29)$$

Derivando ambo i membri:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left[\frac{d}{dx} (x^x) \right] \ln x + x^{x-1} \quad (30)$$

Calcoliamo la derivata di $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} x^x$:

$$\ln g(x) = x \ln x \implies \frac{g'(x)}{g(x)} = \ln x + 1 \implies \frac{d}{dx} (x^x) = x^x (\ln x + 1),$$

che sostituita nella (30) porge:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= x^x \ln x (\ln x + 1) + x^{x-1} \\ &= x^x \left[\ln x (\ln x + 1) + \frac{1}{x} \right] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^{x^x} \cdot x^{x-1} [x \ln x (\ln x + 1) + 1] \\ &= x^{x^x} \cdot x^{x-1} (x \ln^2 x + x \ln x + 1) \end{aligned} \quad (31)$$

Esercizio 322

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = \sin x \ln x \quad (32)$$

Derivando ambo i membri:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \quad (33)$$

Quindi:

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right) \quad (34)$$

Esercizio 323

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$$

Soluzione

$$\ln f(x) = \sin x \ln \cos x \quad (35)$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \cos x \ln \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot (-\sin x) \\ &= \cos x \ln \cos x - \tan x \sin x \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = (\cos x)^{\sin x} (\cos x \ln \cos x - \tan x \sin x) \quad (36)$$

Esercizio 324

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Soluzione

$$\ln f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \quad (37)$$

Derivando ambo i membri:

$$\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] \quad (38)$$

Esercizio 325

Applicando il metodo della derivata logaritmica, determinare la derivata della seguente funzione:

$$f(x) = (\arctan x)^x$$

Soluzione

$$\ln f(x) = x \ln (\arctan x) \quad (39)$$

Derivando ambo i membri:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (\arctan x) + \frac{x}{\arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

Quindi:

$$f'(x) = (\arctan x)^x \left[\ln (\arctan x) + \frac{x}{(1+x^2) \arctan x} \right] \quad (40)$$

Esercizio 326

[File scaricato da <http://www.extrabyte.info>]

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3at}{1+t^3} \\ y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases},$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

Calcoliamo le derivate $y'(t)$, $x'(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 3a \frac{2t(1+t^3) - 3t^4}{(1+t^3)^2} \\ &= 3a \frac{2t - t^4}{(1+t^3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3a \frac{1+t^3 - 3t^3}{(1+t^3)^2} \\ &= 3a \frac{1-2t^2}{(1+t^3)^2} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(t^3 - 2)}{2t^2 - 1}$$

Esercizio 327

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \\ y(t) = \sqrt[3]{t} \end{cases},$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

Calcoliamo le derivate $y'(t)$, $x'(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt} (t^{1/3}) = \frac{1}{3t^{2/3}} \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{2t^{1/2}} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}t^{-1/6} = \frac{2}{3\sqrt[6]{t}}$$

Esercizio 328

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \sqrt{t^2 + 1} \\ y(t) = \frac{t-1}{\sqrt{t^2+1}} \end{cases},$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

Calcoliamo le derivate $y'(t)$, $x'(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{\sqrt{t^2 + 1} - (t-1) \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t^2 + 1} \\ &= \frac{1+t}{(t^2 + 1)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t+1}{t(t^2+1)}$$

Esercizio 329

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t \sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t \cos t) \end{cases},$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

Calcoliamo le derivate $y'(t)$, $x'(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = at \cos t$$

$$\frac{dx}{dt} = at \sin t$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \tan t$$

Esercizio 330

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^2 t \\ y(t) = b \sin^2 t \end{cases}, \quad (41)$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

Calcoliamo le derivate $y'(t)$, $x'(t)$:

$$\frac{dy}{dt} = -a \sin 2t$$

$$\frac{dx}{dt} = b \sin 2t$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \quad (42)$$

Si noti che allo stesso risultato si perviene eliminando il parametro t tra le (41), nel modo che segue:

$$\cos^2 t = \frac{x}{a}$$

Sostituendo nella seconda delle (41) scritta come $y = b - b \cos^2 t$, si ottiene:

$$y = b - \frac{b}{a}x,$$

da cui la (42).

Esercizio 331

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos^3 t \\ y(t) = b \sin^3 t \end{cases},$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Calcoliamo le derivate $x'(t)$, $y'(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3b \sin^2 t \cos t$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b}{a} \tan t$$

Esercizio 332

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \\ y(t) = \frac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}} \end{cases},$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Calcoliamo le derivate $x'(t)$, $y'(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos^3 t \sin 2t - 3 \cos^2 t \sin t \cos 2t}{\sqrt{\cos^3 2t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\sin^3 t \sin 2t + 3 \sin^2 t \cos t \cos 2t}{\sqrt{\cos^3 2t}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin^3 t \sin 2t + 3 \sin^2 t \cos t \cos 2t}{\cos^3 t \sin 2t - 3 \cos^2 t \sin t \cos 2t} \\ &= \frac{2 \sin^4 t \cos t + 3 \sin^2 t \cos^3 t - 3 \sin^4 t \cos t}{\cos^4 t \sin t + 3 \cos^4 t \sin t + 3 \cos^2 t \sin^3 t} \\ &= -\frac{3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t}{\cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t} \end{aligned}$$

Ricordando l'espansione trigonometrica di $\tan 3t$:

$$\tan 3t = \frac{3 \cos^2 t \sin t - \sin^3 t}{\cos^3 t - 3 \cos t \sin^2 t},$$

si ha:

$$\frac{dy}{dx} = -\tan 3t$$

Esercizio 333

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = e^{2t} \end{cases}, \quad (43)$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$.

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Calcoliamo le derivate $x'(t)$, $y'(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 2e^{2t}$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = -2e^{3t}$$

In questo caso è facile eliminare il parametro t . Dalla prima delle (43):

$$t = -\ln x, \tag{44}$$

quindi:

$$\frac{dy}{dx} = -2e^{-3\ln x} = -\frac{2}{x^3}$$

Allo stesso risultato si perviene eliminando t tra le (43). Tenendo conto della (44):

$$y = e^{-2\ln x} = x^{-2} \implies \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}$$

Esercizio 334

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ y(t) = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}, \tag{45}$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$.

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Calcoliamo le derivate $x'(t)$, $y'(t)$. Per semplificare i calcoli poniamo:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, g(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} x(t) &= \arccos f(t) \\ y(t) &= \arcsin g(t) \end{aligned}$$

Da ciò segue:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{-1}{\sqrt{1-f(t)^2}} \cdot f'(t) \\ &= \frac{\sqrt{1+t^2}}{|t|} \cdot \frac{t}{\sqrt{(1+t^2)^3}} \\ &= \frac{t}{|t|} \frac{1}{1+t^2} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{1-g(t)^2}} \cdot g'(t) \\ &= \sqrt{1+t^2} \cdot \frac{\sqrt{1+t^2} - t \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{1+t^2}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Esercizio 335

[File scaricato da <http://www.extrabyte.info>]

Assegnate le funzioni $x(t)$, $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = a \left(\ln \tan \frac{t}{2} + \cos t - \sin t \right) \\ y(t) = a (\sin t + \cos t) \end{cases},$$

determinare la derivata $\frac{dy}{dx}$.

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Calcoliamo le derivate $x'(t)$, $y'(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a \left(\cot \frac{t}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \sin t - \cos t \right) \\
&= a \left(\frac{1}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} - \sin t - \cos t \right) \\
&= a \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t - \cos t \right) \\
\frac{dy}{dt} &= a (\cos t - \sin t)
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t (\cos t - \sin t)}{\cos^2 t - \sin t \cos t} = \tan t$$

Esercizio 336

Calcolare $\frac{dy}{dx}$ per $t = \frac{\pi}{2}$, se:

$$\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t) \\ y(t) = a(1 - \cos t) \end{cases},$$

Soluzione

Utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Calcoliamo le derivate $x'(t)$, $y'(t)$.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a(1 - \cos t) \\
\frac{dy}{dt} &= a \sin t
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

Per $t = \frac{\pi}{2}$:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=\frac{\pi}{2}} = 1$$

Esercizio 337

Dimostrare che la funzione $y = y(x)$ data in forma parametrica dalle equazioni:

$$\begin{cases} x(t) = 2t + 3t^2 \\ y(t) = t^2 + 2t^3 \end{cases}, \quad (46)$$

è una soluzione dell'equazione differenziale:

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \quad (47)$$

Soluzione

Determiniamo $\frac{dy}{dx}$ utilizzando la notazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Calcoliamo le derivate $x'(t)$, $y'(t)$.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2(1 + 3t) \\ \frac{dy}{dt} &= 2t(1 + 3t) \end{aligned} \quad (48)$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = t \quad (49)$$

Sostituendo la (48) nella (47), vediamo che questa si riduce a una identità.

Esercizio 338

[File scaricato da <http://www.extrabyte.info>]

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$2x - 5y + 10 = 0, \quad (50)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Deriviamo primo e secondo membro della (50):

$$2 - 5y' = 0$$

Quindi:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{2}$$

Esercizio 339

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad (51)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Deriviamo primo e secondo membro della (51):

$$2\frac{x}{a^2} + 2\frac{yy'}{b^2} = 0$$

Quindi:

$$y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Esercizio 340

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$x^3 + x^2y + y^2 = 0, \quad (52)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Deriviamo primo e secondo membro della (52):

$$3x^2 + 2x + y + x^2y' + 2yy' = 0$$

Cioè:

$$y'(x^2 + 2y) = -3x^2 - 2xy \quad (53)$$

Dalla (53) possiamo ricavare la derivata y' :

$$y' = -\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + 2y}$$

Esercizio 341

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, \quad (54)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Deriviamo primo e secondo membro della (54):

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{y'}{2\sqrt{y}} = 0 \quad (55)$$

Dalla (55) possiamo ricavare la derivata y' :

$$y' = -\sqrt{\frac{y}{x}}$$

Esercizio 342

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}, \quad (56)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Deriviamo primo e secondo membro della (56):

$$\frac{d}{dx} (x^{3/2}) + \frac{d}{dx} (y^{3/2}) = \frac{d}{dx} (a^{3/2}) = 0$$

Cioè:

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \quad (57)$$

Dalla (57) possiamo ricavare la derivata y' :

$$y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

Esercizio 343

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$y^3 = \frac{x-y}{x+y}, \quad (58)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Dalla (58):

$$xy^3 + y^4 = x - y$$

Derivando primo e secondo membro rispetto a x

$$y^3 + 3xy^2y' + 4y^3y' - 1 + y' = 0$$

Cioè:

$$(3xy^2 + 4y^3 + 1)y + y^3 - 1 = 0 \quad (59)$$

Dalla (59) possiamo ricavare la derivata y' :

$$y' = \frac{1 - y^3}{3xy^2 + 4y^3 + 1}$$

Esercizio 344

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$y - a \sin y = x, \quad (60)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Derivando primo e secondo membro della (60) rispetto a x :

$$y' - ay' \cos y = 1 \quad (61)$$

Dalla (61) possiamo ricavare la derivata y' :

$$y' = \frac{1}{1 - a \cos y}$$

Esercizio 345

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$a \cos^2(x + y) = b, \quad (62)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Derivando primo e secondo membro della (62) rispetto a x :

$$-2a \cos(x + y) \sin(x + y) \cdot (1 + y') = 0$$

cioè:

$$(1 + y') \sin 2(x + y) = 0 \quad (63)$$

Dalla (63) possiamo ricavare la derivata y' :

$$y' = -1, \quad \forall x \mid \sin 2(x + y) \neq 0$$

Esercizio 346

[file scaricato da <http://www.extrabyte.info>]

Assegnata la curva $y = 2^x$, determinare in un punto qualunque $P(x, f(x))$, la lunghezza t della tangente, della sottotangente (S_t), della normale (n) e della sottonormale (S_n)

Soluzione

Poniamo:

$$f(x) \stackrel{def}{=} 2^x$$

Quindi:

$$f'(x) = 2^x \ln 2$$

La lunghezza della tangente è data da:

$$\begin{aligned} t &= \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \sqrt{1 + f'(x)^2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 2^{2x} \ln^2 2}}{\ln 2} \end{aligned} \quad (64)$$

La lunghezza della sottotangente è data da:

$$S_t = \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \quad (65)$$

$$= \frac{1}{\ln 2}$$

La lunghezza della normale è data da:

$$n = |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2} \quad (66)$$

$$= 2^x \sqrt{1 + 2^{2x} \ln^2 2}$$

La lunghezza della sottonormale è data da:

$$S_n = |f(x) f'(x)| \quad (67)$$

$$= 2^{2x} \ln 2$$

Esercizio 347

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$xy = \arctan \frac{x}{y}, \quad (68)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Derivando primo e secondo membro della (68) rispetto a x :

$$y + xy' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{y - xy'}{y^2}$$

$$= \frac{y - xy'}{x^2 + y^2}$$

Riordinando i vari termini:

$$y'x(1 + x^2 + y^2) = y(1 - x^2 - y^2)$$

cioè:

$$y' = \frac{y(1 - x^2 - y^2)}{x(1 + x^2 + y^2)}$$

Esercizio 348

Assegnata la funzione y implicitamente definita da:

$$x^y = y^x, \quad (69)$$

determinare la derivata $y' = \frac{dy}{dx}$

Soluzione

Prendiamo il logaritmo di primo e secondo membro di (69):

$$y \ln x = x \ln y$$

Deriviamo primo e secondo membro:

$$y' \ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y} y'$$

Riordinando i vari termini, e risolvendo rispetto a y' :

$$y' = \frac{x \ln y - y}{y \ln x - x} \cdot \frac{y}{x}$$

Esercizio 349

Assegnata la curva $y = x^2$, determinare:

1. L'equazione della tangente e della normale in $P_0(x_0, f(x_0))$, essendo $x_0 = 3$.
2. La lunghezza t della tangente, della sottotangente (S_t), della normale (n) e della sottotonormale (S_n)

Soluzione

Poniamo:

$$f(x) \stackrel{def}{=} x^2$$

Quindi:

$$f(3) = 9, f'(3) = 6$$

L'equazione della retta tangente in P_0 è:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Cioè:

$$y = 6x - 9 \quad (70)$$

L'equazione della normale nel medesimo punto:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Cioè:

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{2} \quad (71)$$

La lunghezza della tangente è data da:

$$\begin{aligned} t &= \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \sqrt{1 + f'(x_0)^2} \\ &= \frac{3}{2} \sqrt{37} \end{aligned} \quad (72)$$

La lunghezza della sottotangente è data da:

$$\begin{aligned} S_t &= \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad (73)$$

La lunghezza della normale è data da:

$$\begin{aligned} n &= |f(x_0)| \sqrt{1 + f'(x_0)^2} \\ &= 9\sqrt{37} \end{aligned} \quad (74)$$

La lunghezza della sottonormale è data da:

$$\begin{aligned} S_n &= |f(x_0) f'(x_0)| \\ &= 54 \end{aligned} \quad (75)$$

Esercizio 350

Mostrare che la lunghezza della normale all'iperbole equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad (76)$$

è uguale in un qualunque punto $P(x, y)$ al raggio vettore di P : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluzione

Osserviamo che la funzione $y(x)$ è implicitamente definita attraverso la (76). Quindi deriviamo primo e secondo membro rispetto a x :

$$x - yy' = 0,$$

cioè:

$$y' = \frac{x}{y} \quad (77)$$

La lunghezza della normale è:

$$n = |y| \sqrt{1 + y'^2}$$

Per la (77):

$$n = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

Esercizio 351

Mostrare che la lunghezza della sottonormale all'iperbole equilatera:

$$x^2 - y^2 = a^2, \quad (78)$$

è uguale in un qualunque punto $P(x, y)$ a $|x|$.

Soluzione

Osserviamo che la funzione $y(x)$ è implicitamente definita attraverso la (78). Quindi deriviamo primo e secondo membro rispetto a x :

$$x - yy' = 0,$$

cioè:

$$y' = \frac{x}{y} \quad (79)$$

La lunghezza della normale è:

$$S_n = |yy'|$$

Per la (79):

$$S_n = |x|$$

Esercizio 352

Dimostrare che il segmento della tangente all'iperbole

$$xy = a^2, \quad (80)$$

compreso tra gli assi delle coordinate, è diviso a metà dal punto di tangenza.

Soluzione

Sia $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$ $y = \frac{a^2}{x}$, da cui $y_0 = \frac{a^2}{x_0}$. Poniamo:

$$f(x) = \frac{a^2}{x}$$

Quindi:

$$f'(x_0) = -\frac{a^2}{x_0^2}$$

L'equazione della tangente a γ in P_0 è:

$$y = -\frac{a^2}{x_0^2}x + \frac{2a^2}{x_0} \quad (81)$$

Indicati con M e N i punti di intersezione di γ con gli assi coordinati (fig. 7), dobbiamo dimostrare che P_0 è il punto medio del segmento \overline{MN} .

A tale scopo calcoliamo le coordinate di tali punti. Nella (81) poniamo:

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies y = \frac{2a^2}{x_0} \implies M\left(0, \frac{2a^2}{x_0}\right) \\ y = 0 &\implies x = 2x_0 \implies N(2x_0, 0) \end{aligned}$$

Quindi il punto medio ha coordinate:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{0 + 2x_0}{2} = x_0 \\ \bar{y} &= \frac{\frac{2a^2}{x_0} + 0}{2} = \frac{a^2}{x_0} = y_0 \end{aligned}$$

Cioè $P_0(x_0, f(x_0))$ è il punto medio del segmento \overline{MN} .

Esercizio 353

Dimostrare che per l'asteroide:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad (82)$$

il segmento della tangente, compreso tra gli assi coordinati, ha una lunghezza pari a a .

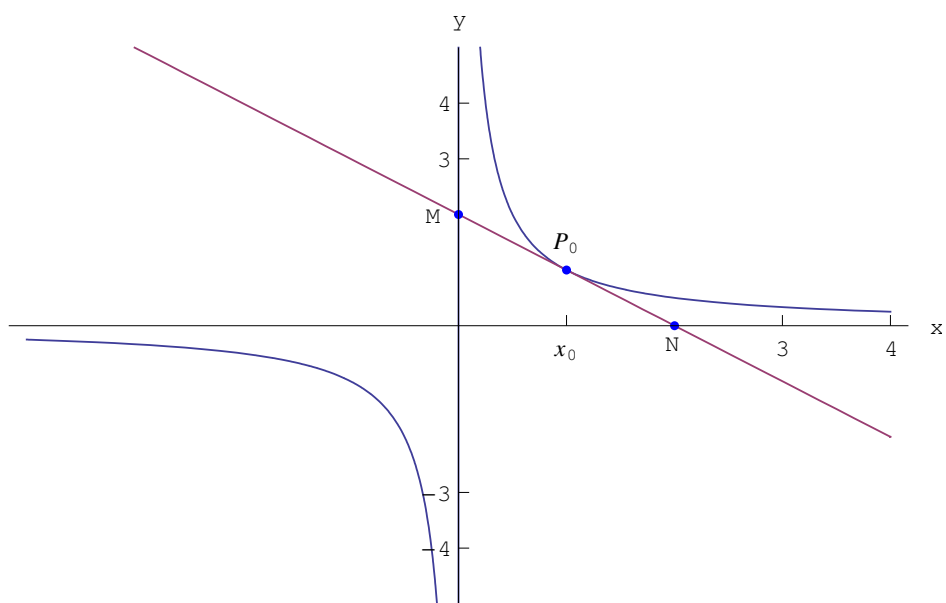


Figure 7: Retta tangente a $\gamma) xy = a^2$.

Soluzione

Deriviamo rispetto a x primo e secondo membro della (82):

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}y' = 0 \implies y' = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

Sia $P_0(x_0, y_0) \in \gamma$ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, quindi:

$$y_0^{2/3} = a^{2/3} - x_0^{2/3}$$

Senza perdita di generalità, supponiamo che sia $y_0 > 0$:

$$y_0 = \left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{3/2}$$

La derivata nel punto x_0 :

$$y'_0 = -\frac{\left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2}}{x_0^{1/3}}$$

Possiamo ora scrivere l'equazione della tangente a γ in P_0 :

$$y = -\frac{x}{x_0^{1/3}} \left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2} + a^{2/3} \left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2} \quad (83)$$

Indicati con M e N i punti di intersezione di γ con gli assi coordinati dobbiamo dimostrare che $\overline{MN} = a$.

A tale scopo calcoliamo le coordinate di tali punti. Nella (83) poniamo:

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies y = a^{2/3} \left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2} \implies M \left(0, a^{2/3} \left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2}\right) \\ y = 0 &\implies x = a^{2/3} x_0^{1/3} \implies N \left(a^{2/3} x_0^{1/3}, 0\right) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \overline{MN} &= \sqrt{\left[0 - a^{2/3} x_0^{1/3}\right]^2 - \left[\left(a^{2/3} - x_0^{2/3}\right)^{1/2} - 0\right]^2} \\ &= a \end{aligned}$$

Esercizio 354

Scrivere le equazioni della tangente e della normale alla curva

$$x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0, \quad (84)$$

nel punto di ordinata $y = 3$.

Soluzione

Deriviamo rispetto a x primo e secondo membro della (84):

$$3x^2 + 2yy' + 2 = 0 \implies y' = -\frac{3x^2 + 2}{2y}$$

Per $y = 3$ la (84) diventa:

$$x^3 + 2x + 3 = 0 \iff (x + 1)(x^2 - x + 3) = 0 \underset{x \in \mathbb{R}}{\iff} x = -1$$

Quindi:

$$y'(-1) = -\frac{5}{6}$$

Da ciò possiamo scrivere l'equazione della tangente:

$$\tau) \quad y = -\frac{5}{6}x + \frac{13}{6} \iff 5x + 6y - 13 = 0$$

L'equazione della normale:

$$\nu) \quad y - 3 = \frac{6}{5}(x + 1) \iff 6x - 5y + 21 = 0$$

Esercizio 355

Dimostrare che le normali all'evolvente del cerchio:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t \sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (85)$$

sono tangenti al cerchio $x^2 + y^2 = a^2$.

Soluzione

Determiniamo la derivata $\frac{dy}{dx}$ della funzione $y(x)$ implicitamente definita dalle (85). A tale scopo calcoliamo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= at \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= at \sin t, \end{aligned}$$

donde:

$$\frac{dy}{dx} = \tan t$$

L'equazione della normale alla curva (85) nel punto di coordinate $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ è:

$$n_0) y - y(t_0) = - \left(\frac{dx}{dy} \right)_{t=t_0} [x - x(t_0)]$$

Cioè:

$$y = a(\sin t_0 - t_0 \cos t) - \cot t_0 (x - a \cos t_0 - at_0 \sin t_0)$$

Semplificando:

$$n_0) y = -x \cot t_0 + a(\sin t_0 + \cot t_0 \cos t_0) \quad (86)$$

Determiniamo ora l'equazione della tangente alla curva:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

A tale scopo esprimiamo quest'ultima in forma parametrica:

$$\begin{cases} x(t) = a \cos t \\ y(t) = a \sin t \end{cases} \quad (87)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -a \sin t \\ \frac{dy}{dt} &= a \cos t \end{aligned} \quad (88)$$

Cioè:

$$\frac{dy}{dx} = -\cot t \quad (89)$$

Pertanto l'equazione della tangente alla curva (87) nel punto di coordinate $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ è:

$$\tau_0) y - y(t_0) = - \left(\frac{dy}{dx} \right)_{t=t_0} [x - x(t_0)]$$

con le varie grandezze date dalle (87)-(88)-(89). Quindi:

$$\tau_0) y = -x \cot t_0 + a(\sin t_0 + \cot t_0 \cos t_0) \quad (90)$$

Cioè

$$\forall t_0 \in \mathbb{R}, n_0 \equiv \tau_0$$

donde l'asserto.

La curva di equazioni parametriche (85) è riportata in fig. (8).

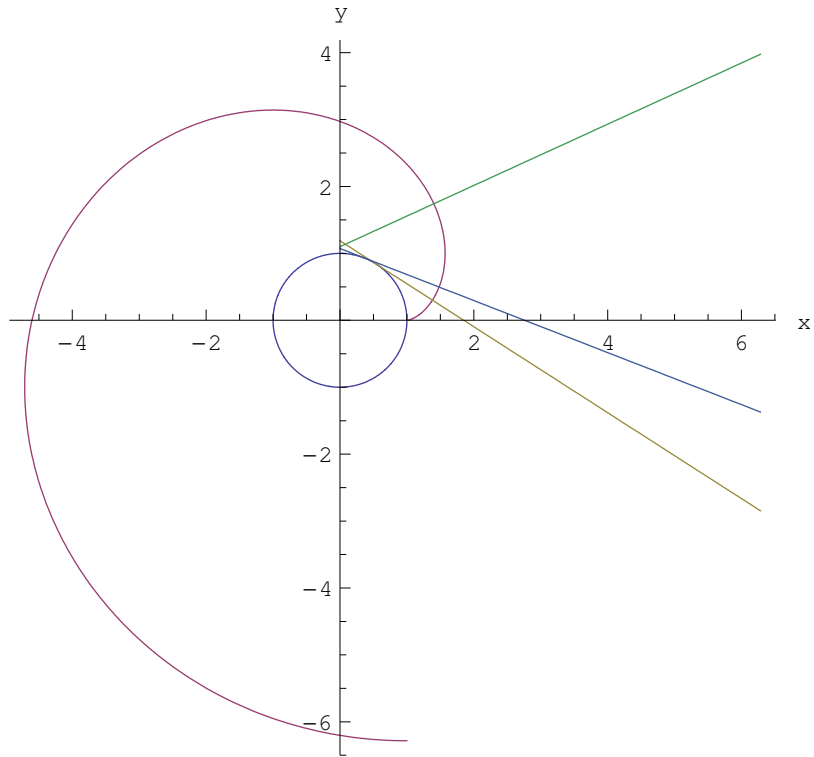


Figure 8: Curva di equazioni parametriche $\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t \sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$

Esercizio 359

Un punto si muove sull'iperbole

$$y = \frac{10}{x} \quad (91)$$

con una velocità tale che la sua ascissa cresce uniformemente alla velocità di una unità per secondo. Determinare la velocità di variazione della sua ordinata quando il punto transita per $P_1(5, 2)$.

Soluzione

È conveniente passare ad una rappresentazione parametrica della (91), assumendo come parametro il tempo t . A tale scopo osserviamo che $x(t) = vt$, essendo v la velocità con cui l'ascissa x varia nel tempo. Per ipotesi è $v = 1$ unità/s, per cui scriviamo:

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{10}{t} \end{cases} \quad (92)$$

La derivata di $y(t)$ è:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{10}{t^2} \quad (93)$$

Determiniamo a quale istante il punto transita per $P_1(5, 2)$. Deve essere $x(t_1) = 5 \implies t_1 = 5$ s. Dalla (93) possiamo determinare la velocità con cui varia y quando il punto passa per P_1 :

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=t_1} = -\frac{2}{5}$$