Esercizio 1261

Determinare gli eventuali punti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

***

Soluzione
Il gradiente di f è:

$$\nabla f = (2x + y - 4)\,\mathbf{i} + (x + 2y - 2)\,\mathbf{j}$$

Il versore di una qualunque retta orientata è

$$\mathbf{n} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j}$$

donde:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (2x + y - 4)\,\lambda + (x + 2y - 2)\,\mu$$

Per definizione di punto stazionario:

$$\begin{aligned}\left(\forall \mathbf{n}, \frac{\partial f}{\partial n} = 0\right) &\iff (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (2x + y - 4)\,\lambda + (x + 2y - 2)\,\mu = 0) \\ &\iff \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases},\end{aligned}$$

che è un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$(x_0, y_0) = (2, 0)$$

Quindi la funzione assegnata ha l'unico punto stazionario $P_0(2,0)$.

Esercizio 1262

Determinare la derivata di

$$f(x,y) = 2x^2 - 3y^2$$

secondo la direzione n che forma un angolo $\alpha = \frac{2}{3}\pi$ con l'asse x.

***

Soluzione
Il versore di $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \lambda \mathbf{i} + \mu \mathbf{j}$$

con

$$\begin{aligned}\lambda &= \cos\alpha = -\frac{1}{2} \\ \mu &= \cos\beta = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

donde:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

Il gradiente di f

$$\nabla f = 4x\mathbf{i} - 6y\mathbf{j}$$

Ad esempio nel punto $P_0\,(1,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = -2x\mathbf{i} - 3\sqrt{3}y\mathbf{j} \Longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{P_0} = -2$$

Esercizio 1263

Determinare la derivata di $f\,(x,y) = x^2 - xy - 2y^2$ secondo la direzione n che forma un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ con l'asse x e nel punto $P_0\,(1,2)$.

***

Soluzione
Il versore di $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j}$$

con

$$\lambda = \cos\alpha = \frac{1}{2}$$
$$\mu = \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donde:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$$

Il gradiente di f

$$\nabla f = (2x - y)\,\mathbf{i} - (x + 4y)\,\mathbf{j}$$

Nel punto P_0:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) x\mathbf{i} - \left(\frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\right) y\mathbf{j} \Longrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{P_0} = -\frac{9}{2}\sqrt{3}$$

Esercizio 1264

Sia $f \in C^1\,(A)$ con A campo di $\mathbb{R}^n$. Preso arbitrariamente $P \in A$, il vettore $\nabla f|_P$ è ortogonale in P alla superficie di livello di f.

***

Soluzione
Senza perdita di generalità consideriamo una funzione di due variabili $f(x,y)$. Quindi, preso $P(x,y) \in A$:

$$\nabla f|_P = f_x(x,y)\,\mathbf{i} + f_y(x,y)\,\mathbf{j}$$

La curva di livello ha equazione $f(x,y) = c$, e considerando $y = y(x)$, abbiamo la funzione composta $f[x, y(x)]$. La derivata totale di tale funzione rispetto a x è:

$$f_x(x,y) + f_y(x,y)\,y'(x) = 0,$$

da cui:

$$y'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \tag{1}$$

Se (x,y) sono le coordinate di P, la (1) è il coefficiente angolare della retta tangente alla curva di livello $f(x,y) = c$ nel punto P, onde:

$$m = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

Ma il coefficiente angolare di una retta parallela a $\nabla f|_P$ è:

$$m' = \frac{f_y(x,y)}{f_x(x,y)} = -\frac{1}{m},$$

donde l'asserto.
Osserviamo che tale risultato è intuitivamente ovvio, poiché essendo la derivata secondo la direzione n data da

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\nabla f) \cdot \mathbf{n},$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore della retta orientata n, se calcoliamo tale derivata nella direzione della tangente τ alla curva di livello, segue:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = 0, \tag{2}$$

in quanto lungo la curva di livello la funzione è costante. Quindi dalla (2):

$$(\nabla f) \cdot \tau = 0 \Longleftrightarrow \nabla f \perp \tau$$

Qui $\tilde{\tau}$ è il versore della retta tangente.

Esercizio 1265

Determinare la derivata della funzione

$$f(x,y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

secondo la direzione della bisettrice del I e III quadrante. Calcolare poi il valore assunto dalla derivata nel punto $(1, -1)$.

***

Soluzione
Un vettore parallelo e concorde alla retta orientata (nel verso delle x crescenti) $x - y = 0$ è:

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$$

Il versore è:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{i} + \mathbf{j})$$

La derivata secondo la direzione $\mathbf{n}$ è:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla f,$$

essendo ∇f il gradiente della funzione f:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Per il calcolo delle derivate parziali, scriviamo:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \left(x^2 + y^2\right),$$

onde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Da ciò segue:

$$\nabla f = \frac{1}{x^2 + y^2} (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

La derivata secondo la direzione $\mathbf{n}$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{x + y}{\sqrt{2}(x^2 + y^2)}$$

Nel punto $(1, -1)$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_{(1,-1)} = 0$$

Esercizio 1266

Determinare la derivata della funzione

$$f(x, y) = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$$

secondo la direzione della retta congiunte i punti $P(1, 2)$, $Q(4, 6)$, orientata nel verso da P a Q. Calcolarn poi il valore nel puntp P.

***

Soluzione
Indichiamo con $\mathbf{u}$ il vettore individuato dal segmento $\overline{PQ}$:

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

Il suo versore è:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j}$$

La derivata di f nella direzione $\mathbf{n}$ è data dal prodotto scalare:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \nabla f \cdot \mathbf{n}$$

Calcoliamo quindi il gradiente di f

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

Le derivate parziali sono:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 4xy + y^2, \ \ \frac{\partial f}{\partial y} = -2x\left(x - y\right)$$

Quindi il gradiente:

$$\nabla f = \left(3x^2 - 4xy + y^2\right)\mathbf{i} - 2x\left(x - y\right)\mathbf{j}$$

La derivata secondo la direzione n:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{1}{5}\left(x^2 - 4xy + 3y^2\right),$$

che calcolata nel punto P porge:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial n}\right|_P = 1$$

Esercizio 1267

Determinare l'angolo compreso tra i gradienti della funzione

$$f\left(x, y\right) = \ln\left(\frac{y}{x}\right),$$

nei punti $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $Q\left(1, 1\right)$.

***

Soluzione
Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\frac{1}{x},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y}$$

Il gradiente di f è:

$$\nabla f=-\frac{1}{x}\mathbf{i}+\frac{1}{y}\mathbf{j}$$

Poniamo:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1&=\nabla f|_P&=-2\mathbf{i}+4\mathbf{j}\\ \mathbf{v}_2&=\nabla f|_Q&=-\mathbf{i}+\mathbf{j}\end{aligned}$$

L'angolo α tra tali vettori è dato da:

$$\cos\alpha=\frac{\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1|\,|\mathbf{v}_2|},$$

essendo $\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2$ il prodotto scalare tra i due vettori. quindi:

$$\cos\alpha=\frac{6}{2\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Esercizio 1268

Costruire il campo vettoriale del gradiente della funzione

$$f\left(x,y\right)=x+y$$

***

Soluzione
Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1,\ \ \frac{\partial f}{\partial y}=1$$

Il gradiente di f è:

$$\nabla f=\mathbf{i}+\mathbf{j}$$

cioè il campo vettoriale costante (fig. 1).
Questo risultato è intuitivamente ovvio, giacché la funzione assegnata è lineare, quindi il suo grafico è un piano, mentre le curve di livello sono rette parallele di equazione:

$$y=-x+c,\quad -\infty<c<+\infty$$

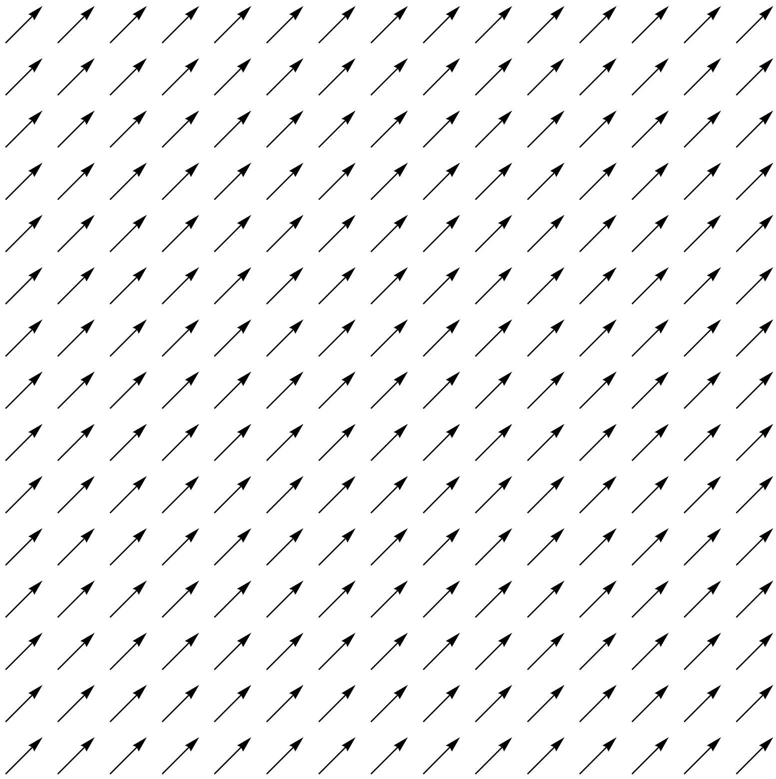

Figure 1: Campo vettoriale del gradiente di $f(x,y) = x + y$

Come è noto ∇f è ortogonale alle curve di livello, e siccome queste sono rette parallele, segue necessariamente ∇f. Si noti che ∇f esprime la direzione di massima crescita di una funzione. Anche questo risultato è intuitivamente ovvio, poiché lungo le curve di livello la funzione è costante, mentre in una direzione perpendicolare si ha la massima variazione.

Esercizio 1269

Costruire il campo vettoriale del gradiente della funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

***

Soluzione
Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x$$

Il gradiente di f è:

$$\nabla f = 2(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Tale campo è riportato in fig. 2.

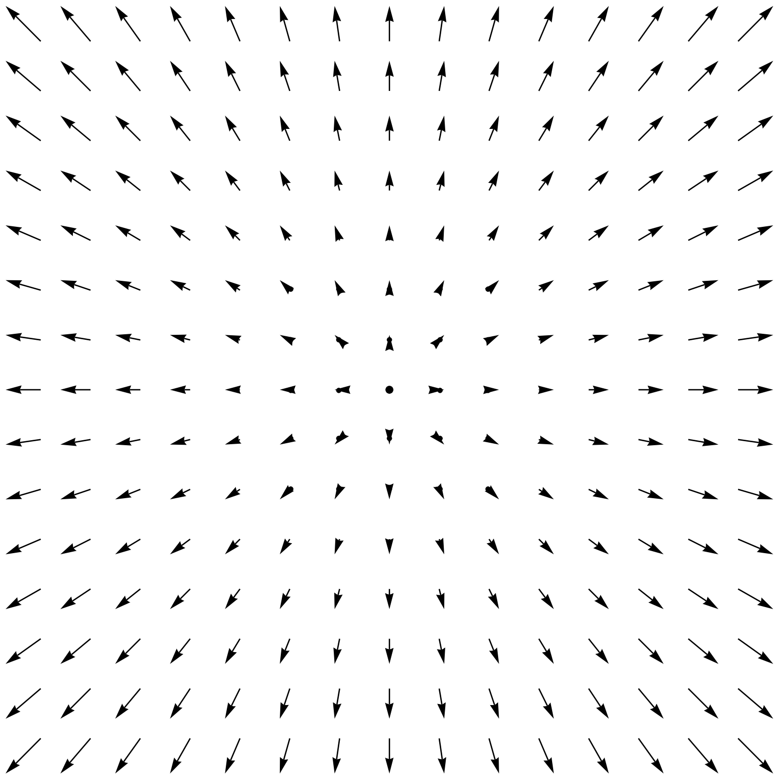

Figure 2: Campo vettoriale del gradiente di $f(x, y) = x^2 + y^2$

Esercizio 1270

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Costruire il campo vettoriale del gradiente della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

***

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali di f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -y\sqrt{x^2 + y^2} \tag{3}$$

Il gradiente di f è:

$$\nabla f = -\sqrt{x^2 + y^2}\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$$

Tale campo è riportato in fig. 3.

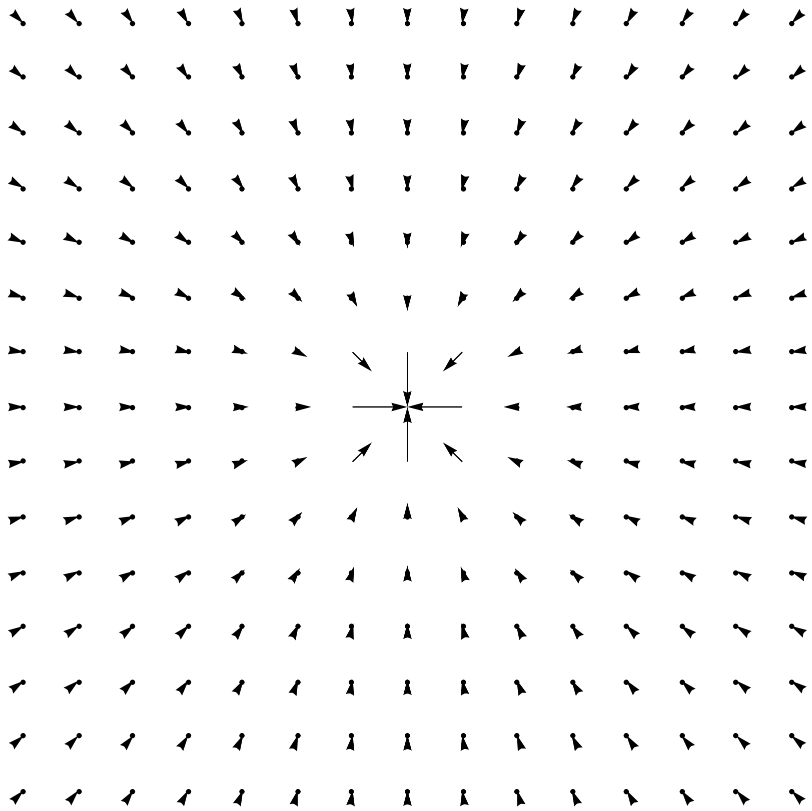

Figure 3: Campo vettoriale del gradiente di $f\,(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$