

Derivata secondo una direzione. Nozione di Gradiente

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Sia A un campo di \mathbb{R}^n .

Definizione 1 Un campo vettoriale su A è la funzione vettoriale:

$$\begin{aligned}\mathbf{X} : A &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x} &\longrightarrow \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in A\end{aligned}\tag{1}$$

Il campo vettoriale (1) associa ad ogni punto $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, il vettore $\mathbf{X}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, che si chiama **vettore applicato** nel punto \mathbf{x} .

Definizione 2 Assegnata la funzione parzialmente derivabile:

$$\begin{aligned}f : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\longrightarrow f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in A\end{aligned}\tag{2}$$

il **gradiente** di f è il campo vettoriale:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

che associa ad ogni $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ il vettore $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \in \mathbb{R}^n$

Ciò premesso, consideriamo - senza perdita di generalità - una funzione reale $f(x, y, z)$ definita in un campo $A \subseteq \mathbb{R}^3$. Sia n una retta orientata passante per il punto $P_0(x_0, y_0, z_0) \in A$. Dalla geometria analitica sappiamo che le equazioni parametriche di n sono:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \lambda t \\ y &= y_0 + \mu t \\ z &= z_0 + \nu t,\end{aligned}\tag{3}$$

essendo $t \in \mathbb{R}$ il parametro della rappresentazione (3), e (λ, μ, ν) i coseni direttori di n . Ricordiamo che

$$\lambda = \cos \alpha, \quad \mu = \cos \beta, \quad \nu = \cos \gamma,$$

essendo α, β, γ gli angoli che la retta orientata forma con gli assi coordinati e si identificano con le componenti del versore di n ; se \mathbf{v} è un qualunque vettore parallelo e concorde a n

$$\mathbf{v} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k},$$

essendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ i versori degli assi coordinati. La terna (l, m, n) definisce i numeri direttori di n . Quindi:

$$\mathbf{n} = \text{vers}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j} + \nu\mathbf{k} \quad (4)$$

Evidentemente:

$$\forall P \in n, P(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho), \text{ con } |\rho| = |P_0P|,$$

essendo $|P_0P|$ la *misura assoluta* del segmento orientato $\overline{P_0P}$.

Inoltre $\rho > 0$ se il segmento orientato $\overline{P_0P}$ è concorde a n ; $\rho < 0$ se è discorde a n ; $\rho = 0$ se $P_0 \equiv P$.

Assegnato $I_\delta(P_0) \subset A, \forall |\rho| < \delta, P \in I_\delta(P_0)$

$$\begin{aligned} & \forall |\rho| \in (0, \delta), P \in I_\delta(P_0) - \{P_0\} \\ \implies & \exists \frac{f(P) - f(P_0)}{\rho} = \frac{f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} \end{aligned}$$

L'ultimo termine è un rapporto incrementale.

Definizione 3 $\exists \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} \in \mathbb{R} \implies \left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{P_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho}$,
ed è la **derivata della funzione f nel punto P_0 , secondo la direzione n** .

Se tale limite esiste in ogni punto $(x, y, z) \in A$:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda\rho, y + \mu\rho, z + \nu\rho) - f(x, y, z)}{\rho},$$

ed è la **derivata della funzione f secondo la direzione n** .

Teorema 4 Se $f \in C^1(A)$ con A campo di \mathbb{R}^3 , per ogni retta orientata n , esiste $\frac{\partial f}{\partial n}$ ed è data da:

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x}\lambda + \frac{\partial f}{\partial y}\mu + \frac{\partial f}{\partial z}\nu \quad (5)$$

Dimostrazione. Consideriamo il punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Quindi consideriamo la funzione composta:

$$F(\rho) = f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho)$$

La derivata di $F(\rho)$ nel punto $\rho = 0$ è:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF}{d\rho}\right)_{\rho=0} &= \lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{F(\Delta\rho) - F(0)}{\Delta\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{F(\rho) - F(0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \lambda\rho, y_0 + \mu\rho, z_0 + \nu\rho) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho} \end{aligned}$$

Cioè la derivata di f secondo la direzione n , calcolata nel punto P_0 , è la derivata della funzione composta $F(\rho)$ calcolata in $\rho = 0$. Per ipotesi è $f \in C^1(A)$, mentre le funzioni $x(\rho)$, $y(\rho)$, $z(\rho)$ sono manifestamente derivabili. Quindi possiamo applicare la nota formula per il calcolo della derivata della funzione composta:

$$\left(\frac{dF}{d\rho}\right)_{\rho=0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \left(\frac{dx}{d\rho}\right)_{\rho=0} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \left(\frac{dy}{d\rho}\right)_{\rho=0} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} \left(\frac{dz}{d\rho}\right)_{\rho=0}$$

Cioè:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{P_0} \lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{P_0} \mu + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{P_0} \nu$$

Considerando un qualunque punto $P \in A$, si ottiene la (5). ■

Si osservi che la (5) è un prodotto scalare. Infatti, assegnata la base ortornormale $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ dello spazio euclideo \mathbb{R}^3 :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

Tenendo conto della (4):

$$\frac{\partial f}{\partial n} = (\nabla f) \cdot \mathbf{n} \tag{6}$$

Cioè la derivata secondo una direzione è la componente del gradiente di f nella direzione di derivazione.