Capitolo 8

Ricerca delle Primitive

8.1 Integrali, Derivate e il TFCI

In questo capitolo affrontiamo il problema di trovare le primitive di una data funzione f . Il TFCI ci offre una motivazione fondamentale per questa ricerca. Ricordiamo, infatti che esso afferma che se f è una funzione continua, F una sua primitiva, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,.$$

Riuscire a trovare una primitiva, permette quindi di ridurre il problema dell'integrazione, ad un problema più semplice, quello della valutazione del valore di una funzione in due punti.

Un esempio semplice, ci permette di (ri)-illustrare quanto affermato.

Esempio 269 *Calcolare* $\int_0^{\pi/2} \cos x dx$.

Soluzione. Ogni funzione della forma $F(x) = \sin x + C$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$. Per semplicità prendiamo $C = 0$. Usando il TFCI si ha che

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \left.\sin x\right]_0^{\pi/2} = 1\,.$$

Dal punto di vista geometrico, l'integrale rappresenta l'area compresa tra il grafico di $y = \cos x$, l'asse delle x e le rette $x = 0$ e $x = \pi/2$. ■

Quindi, per usare il TFCI bisogna essere capaci di trovare una primitiva della funzione integranda.

Sappiamo già che se f è continua, la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

è una primitiva di f . E' importante sapere che ogni funzione continua ammette primitiva; il nostro problema è però più complesso. Non ci basta sapere che esiste, vogliamo trovare, se possibile, una formula concreta per F. Una formula, cioè, che ci permetta di inserire ingressi numerici e riceverne uscite numeriche.

Abbiamo anche ripetuto più volte che data una funzione continua f si hanno una infinità di primitive di f, che differiscono tra di loro per una costante arbitraria, quindi riuscire ad individuare una primitiva, equivale ad averle trovate tutte.

Nel caso delle derivate, è relativamente semplice calcolare la derivata di una funzione elementare, non solo ma la funzione derivata è anch'essa di tipo elementare, cioè scrivibile come composizione di polinomi, esponenziali, funzioni trigonometriche e le loro inverse.

nel caso della ricerca delle primitive la situazione è più complessa: la primitiva di una funzione elementare può o meno essere elementare. Anche il solo decidere se una funzione f ha a meno una primitiva elementare, può essere complicato.

L'obiettivo di questo capitolo è quello di sviluppare alcune tecniche che ci permettano di vedere e capire se è possibile trovare una primitiva di una funzione **in forma chiusa,** come si usa dire. In una forma cioè esprimibile come combinazione di funzioni semplici.

Osservazione. Molti programmi matematici per computer affrontano il problema della ricerca di primitive. Per esempio il comando `int` di *Maple*, cerca di trovare una primitiva in forma chiusa di una funzione data.

Fino a poco tempo fa non esisteva alcun metodo che permettesse di decidere una volta per tutte se una funzione ammettesse primitiva elementare. Alla fine degli anni '60, tuttavia, R. H. Risch scoprì un algoritmo che determina se una funzione ammette primitiva elementare, e in caso positivo, ne trova una. Nonostante che questo algoritmo e le sue varianti più recenti possano essere implementate sul computer, la maggior parte dei software moderni usano metodi più veloci e meno complicati.

8.1.1 Derivate e Primitive: Strategie Basilari

Le tecniche per la differenziazione(come ad es. la regola del prodotto e quella del quoziente) iniziano con alcune derivate note, combinandole insieme si riescono a produrre nuove derivate. Allo stesso modo, la ricerca di primitive richiede una base di formule note, alle quali ricondurre le altre.

Noi useremo, principalmente, le seguenti

Formule Base per le Primitive

$$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C \quad \text{se } k \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad \text{se } a \neq 1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$$

Una sottigliezza: Logaritmi e Valore Assoluto La formula $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ sembra avere un ingrediente inaspettato: il valore assoluto. Sappiamo che la derivata di $\ln x$ è $1/x$, perché il valore assoluto ?

La risposta ha a che vedere con i domini. La funzione $1/x$ è definita per tutti gli $x \neq 0$; idealmente una primitiva dovrebbe avere lo stesso dominio. Sfortunatamente la funzione $\ln x$ è definita solo per valori positivi dell'ingresso x. L'uso di $G(x) = \ln|x|$ risolve il problema in modo pulito. Questa funzione ha sia il dominio giusto (numeri positivi e negativi) che la giusta primitiva.

Vediamo i grafici delle due funzioni per rendere evidente questo dato.

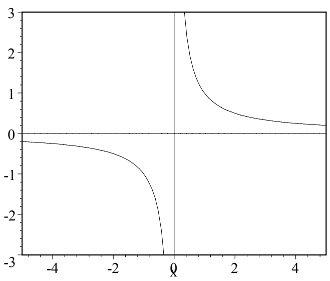


Grafico di $y = 1/x$

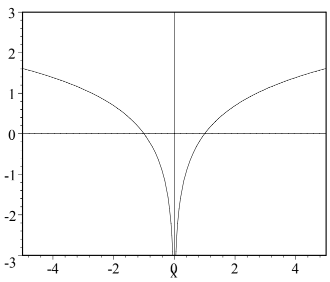


Grafico di $y = \ln|x|$

Combinazione di Primitive: Somme e Moltiplicazione per una Costante

Tutte le regole per la derivazione, lette a rovescio, ci dicono qualcosa nella ricerca delle primitive. Le regole più semplici, come noto sono quelle che riguardano la somma e la moltiplicazione per una costante. Se f e g sono funzioni continue e k è una costante, si ha

$$\begin{aligned}\int (f(x)+g(x))\,dx &= \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx\,;\\ \int k\cdot f(x)\,dx &= k\cdot\int f(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Esempio 270 *Trovare* $\int (3\cos x - 2\,e^x)\,dx\,.$

Soluzione. Usando le formule per la somma e moltiplicazione per una costante, si ha

$$\begin{aligned}\int (3\cos x - 2\,e^x)\,dx &= \int 3\cos x\,dx - \int 2\,e^x\,dx\\ &= 3\int \cos x\,dx - 2\int e^x\,dx\\ &= 3\sin x - 2e^x + C\,.\end{aligned}$$

La soluzione può essere controllata, differenziando. ■

Prova e Controlla

Congetturare, in modo intelligente, possibili soluzioni del problema e controllare è una buona strategia per la ricerca di primitive. Poiché derivare è semplice, non è un problema, nella maggior parte dei casi, controllare se la congettura pensata è corretta o meno.

Esempio 271 *Trovare* $\int \cos 2x\,dx\,.$

Soluzione. Poiché $\int \cos x\,dx = \sin x + C$, noi potremmo congetturare che $\sin 2x$ possa essere una soluzione. Proviamo a derivare; si ottiene $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ Se ne deduce immediatamente che

$$\frac{1}{2}(\sin 2x)' = \cos 2x\,.$$

Ne segue che

$$\int \cos 2x\,dx = \frac{\sin 2x}{2} + C\,.$$

■

Esempio 272 *Calcolare* $\int \frac{6}{1+4\,x^2}dx$

Soluzione. La forma dell'integrando suggerisce la primitiva possa essere un arcotangente; una funzione del tipo $A\arctan Bx$. proviamo a differenziare, si ha

$$(A\arctan Bx)' = A\frac{1}{1+(Bx)^2}B = \frac{A\,B}{1+B^2x^2}\,.$$

Controllando con l'integrando si ha: $A\,B = 6$ e $B^2 = 4$. Ponendo $A = 3$ e $B = 2$ si ottiene il risultato voluto: $F(x) = 3\,\arctan 2x\,.$ ■

8.1.2 Esercizi

1. Calcolare le primitive delle seguenti funzioni. Controllare il risultato per differenziazione.

   (a) $\int \left(3x^5 + 4x^{-2}\right) \, dx$;

   (b) $\int \dfrac{dx}{3x}$;

   (c) $\int \dfrac{1}{4\sqrt{1-x^2}} dx$;

   (d) $\int \dfrac{3}{x^2+1} dx$;

   (e) $\int 3e^{4x} \, dx$;

   (f) $\int (1+\sqrt{x}) \, dx$;

   (g) $\int (x+1)^2 \sqrt[3]{x} \, dx$;

   (h) $\int \dfrac{(3-x)^2}{x} \, dx$;

   (i) $\int e^x (1+e^x) \, dx$.

2. Determinare se la primitiva trovata è corretta o meno.

   (a) $\int e^{\sin x} \, dx = e^{-\cos x} + C$;

   (b) $\int \dfrac{1}{1+4x^2} dx = \arctan 2x + C$;

   (c) $\int \left(1 + \tan^2 x\right) \, dx = \tan x + C$;

   (d) $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$;

   (e) $\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln\left(1+x^2\right) + C$;

   (f) $\int \dfrac{1}{a^2+x^2} dx = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C$;

   (g) $\int \tan x \, dx = \ln |\sin x| + C$;

   (h) $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$;

   (i) $\int \dfrac{1}{1-x^2} dx = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{1+x}{1-x} \right| + C$.

3. Usare l'identità trigonometrica $2\sin^2 x = 1 - \cos 2x$ per calcolare $\int \sin^2 x \, dx$.

4. Spiegare perché $\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos 2x} \, dx \neq \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin x \, dx$.

5. Verificare la correttezza delle seguenti uguaglianze

(a) $\int 2\sin x\cos x\,dx = \sin^2 x + C = -\cos^2 x + C\,;$

(b) $\int \cos 2x\,dx = \dfrac{1}{2}\sin 2x + C = \sin x\cos x + C\,;$

(c) $\int \cos^2 x\,dx = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2}\sin x\cos x + C = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x + C\,.$

6. Calcolare le seguenti primitive.

(a) $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx\,;$

(b) $\int \dfrac{4x^2+3x+2}{1+x}\,dx\,;$

(c) $\int \dfrac{x-1}{x+1}\,dx\,;$

(d) $\int \dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx\,;$

(e) $\int \tan^2 x\,dx\,;$

(f) $\int \dfrac{1}{1+\sin x}\,dx\,;$[**Sugg.:**$(a-b)\,(a+b) = a^2 - b^2$]

(g) $\int \dfrac{1}{1+9x^2}\,dx\,;$

(h) $\int \dfrac{6}{9+x^2}\,dx\,;$

(i) $\int \dfrac{2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx\,;$

(j) $\int \dfrac{8}{\sqrt{4-x^2}}\,dx\,.$

8.2 Integrazione per Sostituzione

Prima di definire precisamente questa regola di integrazione, vediamo con alcuni esempi per capire come funziona.

Esempio 273 *Trovare* $\int 2x\cos x^2 dx$. *Trovare, cioè, una primitiva di* $2x\cos x^2$.

Soluzione. Sia $u = u(x) = x^2$, quindi $\dfrac{du}{dx} = 2x$, ne segue che $du = 2xdx$. (**Problema:** si può separare du e dx come se fossero i due membri di un quoziente? Rispondiamo subito di si, torneremo comunque su questo problema più avanti.) Sostituiamo il tutto nell'integrale dato, si ottiene:

$$\int 2x\cos x^2 dx = \int \cos u\, du\,.$$

Quest'ultimo integrale è più semplice del precedente, il resto è normale routine. Troviamo il valore dell'integrale nella variabile u e poi sostituiamo ad u il suo valore in x :

$$\int \cos u\, du = \sin u + C = \sin x^2 + C\,.$$

La correttezza del risultato trovato la possiamo verificare derivando:

$$\left(\sin x^2 + C\right)' = 2x\ \cos x^2$$

come volevamo. ■

A dispetto del metodo, che può sembrare ambiguo (quella separazione tra du e dx) il metodo ha funzionato rapidamente e correttamente. Vediamo un secondo esempio.

Esempio 274 *Trovare* $\int \dfrac{x}{1+x^2} dx$.

Soluzione. Sia $u(x) = 1 + x^2$. ne segue che $du/dx = 2x$ e quindi $du = 2x\, dx$. possiamo adesso sostituire:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}\,.$$

Il primo passaggio è solo di convenienza, moltiplicando per 2 dentro il segno d'integrale rende visibile il du richiesto (abbiamo ovviamente compensato dividendo per 2 fuori dell'integrale!). In questa forma semplice, l'integrale è ora facilmente risolvibile:

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C\,.$$

Controlliamo , infine il risultato, derivando:

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C\right)' = \frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}\,.$$

■

8.2.1 L'Idea della Sostituzione

Come gli esempi precedenti mostrano, una buona sostituzione trasforma un integrale indefinito in un altro più semplice del primo. Il processo ha tre passi:

Sostituzione Va scelta in modo adeguato una funzione $u = u(x)$, e si scrive $du = u'(x)\ dx$. Si sostituisce quindi sia u che du nell'integrale originale $\int f(x)\ dx$ per produrre un nuovo integrale della forma $\int g(u)\ du$.

Integrazione Si risolve l'integrale $\int g(u)\ du$, si trova, cioè, una funzione $G(u)$ tale che $G'(u) = g(u)$.

Risostituzione Nel risultato trovato si sostituisce ad u la sua espressione $u(x)$. Il risultato, $F(x) = G(u(x))$ è una primitiva di f, così come ogni funzione della forma $F(x) + C$.

Esempi: Una Casistica di Sostituzioni

La sostituzione è, in teoria, abbastanza semplice. In pratica, tuttavia trovare la giusta sostituzione può non essere affatto banale e dipende molto dall'esperienza.

I seguenti esempi mostrano alcune delle possibilità e dei trucchi che possono risultare utili.

Il primo problema, ovviamente, è una scelta corretta della funzione u che permetta una semplificazione dell'integrale originario.

Esempio 275 *Calcolare* $\displaystyle\int \sin^3 x\, \cos x\, dx$.

Soluzione. Se $u = \sin x$, ne segue che $du = \cos x\, dx$. Osservato questo fatto, il resto non presenta difficoltà:

$$\int \sin^3 x\, \cos x\, dx = \int u^3\, du = \frac{u^4}{4} + C = \sin^4 x + C\,.$$

■

Esempio 276 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4} dx$.

Soluzione. in questo caso non è immediatamente ovvio quale sia la sostituzione corretta da fare. Potremmo provare $u = 1 + x^4$, ma in questo caso $du = 4x^3\, dx$ che non appare particolarmente utile, visto che niente del genere appare nell'integrale. Una scelta migliore è $u = x^2$. In questo caso si ha $du = 2x\, dx$, quindi

$$\int \frac{x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4} dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\, du\,.$$

Non vi è dubbio che questo integrale è più semplice. La sua primitiva è infatti ben nota:

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\, du = \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C\,.$$

Il controllo del risultato implica, come vi è noto, l'uso della regola di derivazione delle funzioni composte. ■

Ricordiamo ancora una volta che, le proprietà dell'integrale permettono, con assoluta libertà, di moltiplicare e dividere dentro e fuori il segno di integrale.

Esempio 277 *Calcolare* $\int \frac{3x}{5x^2+7} dx$.

Soluzione. Il numeratore è, a parte una costante moltiplicativa, la derivata del denominatore. Questo induce a pensare ad una situazione del tipo $\int du/u$. Se poniamo $u = 5x^2 + 7$ si ha $du = 10x\,dx$, quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{5x^2+7} dx &= \frac{3}{10} \int \frac{10x}{5x^2+7} dx \\ &= \frac{3}{10} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{3}{10} \ln |u| + C \\ &= \frac{3}{10} \ln \left(5x^2+7\right) + C\,. \end{aligned}$$

La derivazione del risultato mostra che il risultato è corretto:

$$\left(\frac{3}{10} \ln \left(5x^2+7\right) + C \right)' = \frac{3}{10} \frac{10x}{5x^2+7} = \frac{3x}{5x^2+7}\,.$$

■

Sostituzioni Inverse: Scrivere x e dx in termini di u e du

Negli esempi visti fino ad adesso,abbiamo sempre scritto u e du in termini di x e dx. E' talvolta conveniente, perché più semplice, esprimere x e dx in funzione di u e du. I due prossimi esempi illustrano questa strategia.

Esempio 278 *Calcolare* $\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx$.

Soluzione. Partiamo come siamo soliti fare. Se $u = \sqrt{2x+3}$ ne segue che $du = dx/\sqrt{2x+3}$. sostituendo si ottiene:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}} dx = \int x \frac{dx}{\sqrt{2x+3}} = \int x\, du\,.$$

Fino ad ora tutto bene, ma che fare della x che rimane?

Il trucco è adesso, quello di scrivere x come funzione di u

$$u = \sqrt{2x+3} \implies u^2 = 2x+3 \implies \frac{u^2-3}{2} = x\,.$$

Sostituendo nell'integrale precedente, si ottiene:

$$\begin{aligned}\int x\,du &= \int \frac{u^2-3}{2}\,du \\ &= \frac{u^3}{6} - \frac{3}{2}u + C \\ &= \frac{(2x+3)^{3/2}}{6} - \frac{3}{2}(2x+3)^{1/2} + C\,.\end{aligned}$$

Per esercizio, ripetiamo il problema, ma in modo leggermente diverso. Poniamo ancora $u = \sqrt{2x+3}$. Notiamo dapprima che

$$\frac{u^2-3}{2} = x \implies u\,du = dx\,.$$

Sostituendo nell'integrale si ha:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+3}}\,dx = \int \frac{u^2-3}{2u}\,u\,du = \int \frac{u^2-3}{2}\,du$$

esattamente come prima. ■

Esempio 279 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx\,.$

Soluzione. Sia $u = \sqrt{x}$. Si ha:

$$x = u^2 \quad \text{e} \quad dx = 2u\,du\,.$$

Sostituendo per x e dx si ottiene

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{2u}{1+u}\,du\,.$$

Quest'ultimo integrale è certamente più semplice di quello dato. Un'altra sostituzione lo rende ancora più semplice. Se $v = 1+u$, allora $dv = du$ e $u = v-1$, quindi

$$\int \frac{2u}{1+u}\,du = \int \frac{2(v-1)}{v}\,dv = 2\int \left(1 - \frac{1}{v}\right) dv = 2(v - \ln|v|) + C\,.$$

Infine, sostituendo per x:

$$2(v - \ln|v|) + C = 2(1 + u - \ln|1+u|) + C = 2 + 2\sqrt{x} - 2\ln|1+\sqrt{x}| + C$$

8.2.2 Sostituzione negli Integrali Definiti

I seguenti due esempi mostrano due modi di valutare gli integrali definiti, calcolati per sostituzione.

Esempio 280 *Calcolare* $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x\cos x^2\,dx\,.$

Soluzione. (**Integrazione in** x) Scriviamo $f(x) = 2x \cos x^2$. Se $F(x)$ è una qualsiasi primitiva di $f(x)$, allora per il TFCI, la risposta cercata è $F\left(\sqrt{\pi/2}\right) - F(0)$.

Abbiamo già trovato una primitiva di f. Usando la sostituzione $u = x^2$, $du = 2x\,dx$ abbiamo visto che $F(x) = \sin x^2$ è una primitiva di f. Ne segue:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cos x^2\,dx = \sin x^2\Big]_0^{\sqrt{\pi/2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin(0) = 1\,.$$

■

Esempio 281 *Calcolare* $\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cos x^2\,dx\,.$

Soluzione. (**Creazione di un nuovo integrale definito**)Poniamo, come prima, $u = x^2$, $du = 2x\,dx$. Agli estremi $x = 0$ e $x = \sqrt{\pi/2}$, si ha $u = 0$ e $u = \pi/2$ rispettivamente. Quindi sostituendo per u, du e per gli estremi d'integrazione, si ottiene:

$$\int_0^{\sqrt{\pi/2}} 2x \cos x^2\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos u\,du\,.$$

Quest'ultimo integrale può essere calcolato così come è

$$\int_0^{\pi/2} \cos u\,du = \sin u\Big]_0^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(0) = 1$$

come prima. ■

Controllate ancora: Osservate con attenzione come abbiamo usato differentemente le sostituzioni nei due casi precedenti. Nel primo abbiamo usato la sostituzione solo come aiuto temporaneo per trovare la primitiva di una data funzione integranda rispetto alla variabile originaria x. Nel secondo esempio abbiamo usato la sostituzione per trasformare l'integrale definito originario in un nuovo integrale definito, con una nuova integranda e nuovi limiti. Il risultato finale nei due casi è, ovviamente, lo stesso.

Sostituzione in Generale: Perché Funziona

In ognuno degli esempi precedenti, la sostituzione ci ha aiutato a trovare la primitiva di una funzione data. per vedere *perché* la sostituzione funziona, la descriveremo nella sua generalità.

per un integrale indefinito, la sostituzione implica la ricerca di una funzione $u = u(x)$ tale che $f(x)$ può essere riscritta nella forma

$$f(x) = g(u(x))\,u'(x)$$

per qualche funzione g. Affermare che la sostituzione funziona significa affermare che

$$\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du\,,$$

cioè che, se G è una funzione tale che $G'(u) = g(u)$, allora $G(u(x))$ è una primitiva di f.

La regola di derivazione delle funzioni composte ci assicura che G ha la proprietà richiesta:

$$\frac{d}{dx}G(u(x)) = G'(u(x))\ u'(x) = f(x)\ ,$$

quindi $G(u(x))$ è proprio la primitiva cercata.

La sostituzione negli integrali definiti funziona allo stesso modo. Il fatto che funzioni è anche chiamato **teorema del cambio di variabile:**

Teorema 282 *Siano f, u e g funzioni continue, tali che per tutti gli $x \in [a,b]$,*

$$f(x) = g(u(x))\ u'(x)\ .$$

Allora si ha

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\ du\,.$$

Dimostrazione. Sia G una primitiva di g. Per il TFCI si ha

$$\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\ du = G(u(b)) - G(u(a))\ .$$

Come mostrato prima (usando la regola di derivazione delle funzioni composte), $G(u(x))$ è una primitiva di $f(x)$.

Quindi,

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(u(b)) - G(u(a))$$

e i due integrali sono uguali. ■

Differenziali: du, dx e questioni connesse

I simboli du e dx sono chiamati **differenziali** di u e di x rispettivamente. Se $u = u(x)$, allora du e dx sono correlate nel modo ovvio: $du = u'(x)\ dx\,.$

Una teoria dei differenziali esiste in matematica, ma va al di là degli scopi di questo volume. Per noi, il differenziale in una espressione integrale (dx in $\int f(x)\,dx$) è essenzialmente un aiuto alla memoria: ci ricorda quale sia la variabile di integrazione. Nei problemi di sostituzione lo scambio di dx in du (o viceversa) ci serve come strumento di lavoro, per poter usare il teorema precedente.

8.2.3 Esercizi

1. Calcolare una primitiva delle funzioni date, usando le sostituzioni indicate.

   (a) $\displaystyle\int (4x+3)^{-3}\,dx\,,\ u=4x+3;$

   (b) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}dx\,,\ u=1+x^2;$

   (c) $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x\,dx\,,\ u=\sin x;$

   (d) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx\,,\ u=\ln x;$

   (e) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx\,,\ u=\arctan x;$

   (f) $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx\,,\ u=\sqrt{x}\,:$

   (g) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx\,,\ u=1/x;$

   (h) $\displaystyle\int x^3\sqrt{9-x^2}\,dx\,,\ u=9-x^2;$

   (i) $\displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\,,\ u=e^x;$

   (j) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x}\,dx\,,\ u=1+x.$

2. Negli integrali seguenti, trovare i numeri a e b che realizzano l'uguaglianza degli integrali, quindi calcolare gli integrali

   (a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\frac{x}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{1+u^2}\,du;$

   (b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi}} x\cos 3x^2\,dx=\frac{1}{6}\int_a^b\cos u\,du;$

   (c) $\displaystyle\int_0^3\frac{x}{(2x^2+1)^3}\,dx=\frac{1}{4}\int_a^b u^{-3}\,du;$

   (d) $\displaystyle\int_1^2 x^2e^{x^3/4}\,dx=\frac{4}{3}\int_a^b e^u\,du;$

3. Sia $a>0$. Mostrare che $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx=\arcsin\frac{x}{a}+C$

4. Siano a e $b > 0$ costanti. Usare la sostituzione $u = a + b/x$ per trovare una primitiva della funzione $1/\left(ax^2 + bx\right)$.

5. Mostrare che $\int \frac{dx}{1+e^x}\, dx = x - \ln(1+e^x) + C$ [**Sugg.:**$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}$]

6. Supponiamo che $\int_0^{12} g(x)\, dx = \pi$. Valutare $\int_0^4 g(3x)\, dx$

7. Sia $I = \int \sec^2 x \tan x \, dx$.

   (a) Usare la sostituzione $u = \sec x$ per mostrare che $I = \frac{1}{2}\sec^2 x + C$.

   (b) Usare la sostituzione $u = \tan x$ per mostrare che I nelle parti (a) e (b) sembrando differenti, ma sono entrambe corrette. Spiegare l'apparente paradosso.

8. Trovare le seguenti primitive, quindi controlla il risultato derivando

   (a) $\int \cos(2x+3)\, dx$;

   (b) $\int \sin(2-3x)\, dx$;

   (c) $\int x\cos\left(1-x^2\right)\, dx$;

   (d) $\int (3x-2)^4\, dx$;

   (e) $\int \frac{2x^3}{1+x^4}\, dx$;

   (f) $\int x(3x+2)^4\, dx$;

   (g) $\int \frac{1}{1-2x}\, dx$;

   (h) $\int \sqrt{3x-2}\, dx$;

   (i) $\int x\sqrt{3x-2}\, dx$;

   (j) $\int \frac{\ln x}{x}\, dx$;

   (k) $\int \frac{\sqrt{x+1/x}}{x^2}\, dx$;

(l) $\displaystyle\int x\, e^{x^2}\, dx$;

(m) $\displaystyle\int x^3 \left(x^4 - 1\right)\, dx$;

(n) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx$;

(o) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}\, dx$

(p) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$;

(q) $\displaystyle\int \frac{x+4}{1+x^2}\, dx$;

(r) $\displaystyle\int x \left(1-x^2\right)^{15}\, dx$;

(s) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{\left(x^2+3x+5\right)^4}\, dx$;

(t) $\displaystyle\int \tan x\, dx$;

(u) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

(v) $\displaystyle\int \tan^2 x\, \csc x\, dx$;

(w) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx$;

(x) $\displaystyle\int \ln\left(\cos x\right) \tan x\, dx$;

(y) $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$;

(z) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)^3}\, dx$

9. Valutare i seguenti integrali definiti

(a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^3}\, dx$;

(b) $\displaystyle\int_{-19}^{8} \sqrt[3]{8-x}\, dx$;

(c) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_e^{4e} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,\cos x\,dx$;

(f) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi} e^{\cos x}\,\sin x\,dx$;

10. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\,dx$

11. Supponiamo che la funzione f sia continua nell'intervallo $[-1,1]$. Usare la sostituzione $u=\pi-x$ per mostrare che

$$\int_0^{\pi} x\,f(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx\,.$$

12. Supponiamo che la funzione f sia continua nell'intervallo $[a,b]$. Mostrare che

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx\,.$$

13. Usare la sostituzione $u=1-x$ per mostrare che

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx\,.$$

14. Usare la sostituzione $u^n=ax+b$ per risolvere i seguenti integrali

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx$

15. Trovare l'errore nella seguente "dimostrazione" che $I=\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=0$

$$I=\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx=\int_{-1}^1 \frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\,dx=-\int_{-1}^1 \frac{1}{1+u^2}\,du=0\,.$$

16. Trovare l'errore nella seguente "dimostrazione" che $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}\,dx = 0$

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-\sin x}\,dx &= \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx \\
&= \int \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}\,dx \\
&\to \int \frac{du}{u} \\
&= 2\sqrt{u}+C \;\to\; 2\sqrt{1+\sin x}+C\,.
\end{aligned}
$$

Ne segue che

$$\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}\,dx = 2\sqrt{1+\sin\pi} - 2\sqrt{1+\sin 0} = 0\,.$$

8.3 Integrale per Parti

Il metodo di **integrazione per parti** è una conseguenza diretta della formula di derivazione del prodotto.

Infatti, se f e g sono due funzioni differenziabili, si ha

$$\frac{d\left(f\cdot g\right)\left(x\right)}{dx}=f\left(x\right)\,\frac{dg\left(x\right)}{dx}+g\left(x\right)\,\frac{df\left(x\right)}{dx}\,,$$

da cui

$$f\left(x\right)\,\frac{dg\left(x\right)}{dx}=\frac{d\left(f\cdot g\right)\left(x\right)}{dx}-g\left(x\right)\,\frac{df\left(x\right)}{dx}\,.$$

Usando la formula di integrazione della somma, che è la somma degli integrali, otteniamo

$$\int f\left(x\right)\,\frac{dg\left(x\right)}{dx}\,dx=f\left(x\right)\,g\left(x\right)-\int g\left(x\right)\,\frac{df\left(x\right)}{dx}\,dx$$

che è chiamata formula di integrazione per parti.

Se indichiamo con $u=f\left(x\right)$ e $v=g\left(x\right)$, la formula può essere scritta, in forma abbreviata, come segue

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du\,.$$

Vediamo subito un esempio illustrativo dell'uso del metodo.

Esempio 283 *Trovare l'integrale* $\displaystyle\int \ln x\,dx\,.$

Soluzione. Osservando la formula di integrazione per parti, sembrerebbe esserci una contraddizione, visto che nella formula che esplicita il metodo appaiono due funzioni. La contraddizione è solo apparente, visto che possiamo sempre pensare $\ln x=1\cdot\ln x$.

Consideriamo quindi $u=\ln x$ e $dv=1$, ne segue che $v=x$ e $du=\dfrac{1}{x}\,dx$ e quindi:

$$\int \ln x\,dx=x\,\ln x-\int x\,\frac{1}{x}\,dx=x\,\ln x-x+C\,.$$

■

Esempio 284 *Trovare* $\displaystyle\int e^{x}\sin x\,dx\,.$

Soluzione. Sia $f\left(x\right)=e^{x}$ e $g'\left(x\right)=\sin x$. Allora

$$f'\left(x\right)=e^{x}\,,\quad \text{e}\quad g\left(x\right)=-\cos x\,.$$

Se indichiamo con I l'integrale, si ha

$$I=-e^{x}\cos x+\int e^{x}\cos x\,dx\,.$$

Sembrerebbe che l'operazione fatta fosse inutile, poiché abbiamo ottenuto un integrale dello stesso tipo. Prima di perderci d'animo, proviamo ad usare, ancora una volta, la regola di integrazione per parti.

Sia $u = e^x$ e $dv = \cos x$. Si ha allora

$$du = e^x \, dx \,, \quad \text{e} \quad v = \sin x \,.$$

Il secondo integrale diventa:

$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \; + C,$$

abbiamo ottenuto di nuovo I ma con il segno cambiato. Si ha allora:

$$I = -e^x \cos x + e^x \sin x - I \; + C.$$

Ne segue:

$$2I = e^x \sin x - e^x \cos x + C \,.$$

e, dividendo per 2 otteniamo il risultato

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x \left(\sin x - \cos x\right)}{2} + C$$

■

Esempio 285 *Calcolare* $\int x \, e^x \, dx$.

Soluzione. Consideriamo ancora $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$. Si ha che $f'(x) = 1$ e $g'(x) = e^x$, da cui

$$\int x \, e^x \, dx = x \, e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = x \, e^x - e^x + C \,.$$

■

Osservazione La regola appare semplice nella sua applicazione. Il vero problema è riuscire a capire quando il metodo può essere applicato e, soprattutto, quale delle due funzioni conviene integrare e quale derivare.

Nel caso degli integrali definiti, la regola di integrazione per parti si scrive nel seguente modo:

$$\int_a^b f(x) \; \frac{dg(x)}{dx} \, dx = \left. f(x) \; g(x) \right]_a^b - \int_a^b g(x) \; \frac{df(x)}{dx} \, dx \,.$$

Esempio 286 $\int_1^e \ln^2 x \, dx$.

Soluzione.

$$
\begin{aligned}
\int_1^e \ln^2 x\, dx &= \int_1^e \ln x \cdot \ln x\, dx \\
&= \ln x\ (x \ln x - x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\, x\, (\ln x - 1)\ dx \\
&= (e-e) - \int_1^e \ln x\, dx + \int_1^e dx \\
&= -\,(x \ln x - x)]_1^e + x]_1^e \\
& \quad\ [(e-e) - (-1)] + (e-1) \\
&= 1 + e - 1 = e\,.
\end{aligned}
$$

■

8.3.1 Esercizi

1. Calcolare i seguenti integrali per parti.
2. $\int \arcsin x \, dx$;
3. $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$;
4. $\int x^2 e^x \, dx$;
5. $\int x \ \sin x \, dx$;
6. $\int x^2 \ \sin x \, dx$;
7. $\int x^2 \ln x \, dx$;
8. $\int x^2 \ \ln^2 x \, dx$;
9. $\int \arctan x \, dx$;
10. $\int \sin^2 x \, dx$;
11. $\int e^{-4x} \ \cos 2x \, dx$;
12. $\int \ln^3 x \, dx$;
13. $\int x^2 \, e^{-x} \, dx$;
14. $\int x \, cox \, dx$;
15. $\int x^2 \cos x \, dx$;
16. $\int x^5 \sqrt{1 - x^2} \, dx$.

17. Calcolare, usando l'integrazione per parti, i seguenti integrali definiti.

    (a) $\displaystyle\int_0^1 x^3\, e^{-x^2} dx;$

    (b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}\, dx;$

    (c) $\displaystyle\int_0^\pi e^x \,\sin x\, dx;$

    (d) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x\, dx;$

    (e) $\displaystyle\int_0^1 x^m\, e^x\, dx\,,\ m \in \mathbb{N};$

    (f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos x\, dx.$

18. Sia B un numero positivo. Trovare l'area sotto la curva $y = x\, e^{-x}$ nell'intervallo $[0, B]$. Cosa succede quando $B \to \infty$?

19. $\displaystyle\int_0^{1/2} \arcsin^2 x\, dx$

8.4 Aiuto al Calcolo degli Integrali: Tavole e Software

Sebbene il calcolo manuale degli integrali possa sembrare difficile e a volte tedioso, vi sono eccellenti ragioni educative per farlo: trovare la giusta sostituzione o il giusto metodo di soluzione possono rivelare interessanti proprietà e ricorrenze e permette soprattutto di acquistare una sensibilità al risultato.

Nonostante il suo valore educativo e di esercizio, il processo del calcolo delle primitive è complicato, a volte lungo e necessita la conoscenza di "trucchi". Per questo motivo, in pratica, coloro che si trovano a dover calcolare integrali usano tavole d'integrali e/o pacchetti software adatti allo scopo.

D'altra parte, come tutti gli strumenti, l'uso delle tavole e del software matematico richiede attenzione. In questa sezione vogliamo mostrare alcune delle possibilità e degli errori.

8.4.1 Tavole di Integrazione

In biblioteca potete trovare un certo numero di volumi che contengono un ampio catalogo di tavole di integrali. Se prendete, per esempio il *CRC Handbook of Chemistry and Physics,* 48-esima edizione, troverete oltre 600 formule per il calcolo delle primitive, per oltre 40 pagine. D'altra parte, non deve stupire che i principali utilizzatori della matematica, dedichino nei loro manuali, ampio spazio al calcolo degli integrali.

Una delle formula che potreste trovare nel volume afferma:

$$\int \frac{1}{a+be^{px}}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap}\ln|a+be^{px}| \tag{8.1}$$

(in realtà nel volume manca il valore assoluto).

Notate la mancanza della costante d'integrazione; scriverne una per ogni integrale nelle tavole sarebbe tipograficamente pesante.

Le tavole d'integrale usano parametri per poter trattare in una sola volta le costanti che variano da problema a problema. In questo modo un singolo integrale può risolvere un'intera famiglia di problemi. I prossimi esempi servono ad illustrare questo fatto

Esempio 287 *Calcolare* $\displaystyle\int \frac{5}{3-2e^{-x}}dx$

Soluzione. Se controlliamo la formula precedente si ha $a = 3$, $b = 2$ e $p = -1$. Ne segue che

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{3-2e^{-x}}dx &= 5\int \frac{1}{3-2e^{-x}}dx \\ &= 5\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{3}\ln\left|3-2e^{-x}\right|\right) + C\,.\end{aligned}$$

■

Esempio 288 *Calcolare* $I = \displaystyle\int \frac{\cos x}{5+2e^{3\sin x}} dx$.

Soluzione. Così come è scritto l'integrale ricorda la formula (8.1), ma solo in modo vago. Tuttavia, se operiamo la sostituzione $u = \sin x$ e $du = \cos x\, dx$ si ottiene

$$\int \frac{\cos x}{5+2e^{3\sin x}} dx = \int \frac{1}{5+2e^{3u}}\, du\,.$$

Ponendo $a = 5$, $b = 2$, e $p = 3$ si ottiene

$$I = \frac{u}{5} - \frac{\ln\left|5+2e^{3u}\right|}{15} + C = \frac{\sin x}{5} - \frac{\ln\left|5+2e^{3\sin x}\right|}{15} + C\,.$$

■

8.4.2 Completare il Quadrato

Espressioni quadratiche del tipo $ax^2 + bx + c$ appaiono spesso nel problema di ricerca di primitive. Completare il quadrato aiuta a volte a capire che tipo di integrale abbiamo di fronte. Vediamo due esempi.

Esempio 289 *Trovare* $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+5}\, dx$.

Soluzione. Sfogliando le tavole d'integrazione si scoprono due possibilità

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}\,, \quad \textbf{e} \quad \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right|\,.$$

Quale dei due possiamo applicare?

Per decidere, completiamo il quadrato del denominatore dell'integrale dato

$$x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x+2)^2 + 1\,.$$

Questo suggerisce la sostituzione $u = x + 2$, $du = dx$. Ne ricaviamo quindi

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\, dx = \int \frac{1}{u^2+1} du = \arctan u + C = \arctan(x+2) + C\,.$$

■

Esempio 290 *Trovare* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+4x+3}\, dx$

Soluzione. Si hanno le stesse due possibilità dell'esempio precedente. Anche questa volta completiamo il quadrato

$$x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1\,.$$

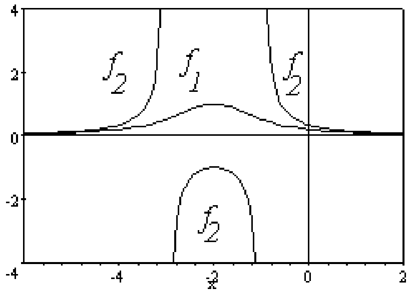
Il resto segue facilmente. La sostituzione $u = x + 2$, $du = dx$ da:

$$\int \frac{1}{x^2+4x+3}\, dx = \int \frac{1}{u^2-1} du = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C\,.$$

■

Può sembrare strano che due espressioni molto simili, $f_1(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+5}$ e $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+3}$ diano risultati così diversi.

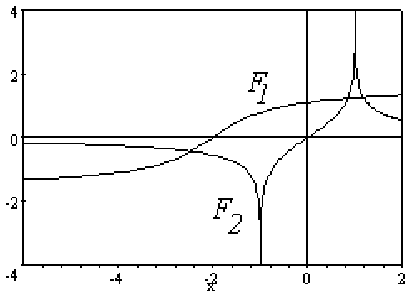
Vediamo graficamente le due funzioni



Grafici di f_1 e di f_2

La differenza adesso è chiara. A parte la loro somiglianza tipografica la due funzioni si comportano in modo molto diverso. f_1 è regolare e definita ovunque, mentre f_2 ammette asintoti verticali per $x = -3$ e $x = -1$, mentre entrambe tendono a 0 quando $x \to \pm\infty$

Se disegniamo il grafico delle loro primitive F_1 e F_2 vediamo che anch'esse si comportano come aspettato.



Grafici di F_1e di F_2

Notate le seguenti proprietà

- Così come f_1 la sua primitiva F_1 si comporta in modo regolare. Mentre F_2 così come f_2 ha asintoti verticali per $x = -3$ e $x = -1$, ma con direzioni diverse.

- Sia F_1 che F_2 tendono ad essere orizzontali per $x \to \pm\infty$. Questo fatto è conseguenza naturale del fatto che le loro derivate tendono a zero per $x \to \pm\infty$.

Formule di Riduzione: Una Primitiva in Forma Ricorsiva

Alcune formule nelle tavole d'integrali presentano integrali in entrambi i lati dell'equazione. Eccone qui una

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx\,. \tag{8.2}$$

Applicando ripetutamente questa formula, può essere possibile risolvere l'integrale.

Esempio 291 *Trovare* $\int \tan^4 x\,dx\,.$

Soluzione. La formula 8.2, con $n = 4$, afferma che

$$\int \tan^4 x\,dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \int \tan^2 x\,dx\,.$$

Possiamo applicare ancora 8.2 all'ultimo integrale, si ha

$$\int \tan^2 x\,dx = \tan x - \int \tan^0 x\,dx = \tan x - x\,.$$

Combinando insieme i risultati si ha

$$\int \tan^4 x\,dx = \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + C\,.$$

■

Integrazione con il Software I manuali di integrazione contengono ampie tavole con funzioni trigonometriche, esponenziali e logaritmiche.

Oggi, sofisticati software matematici come *Derive, Maple, Mathematica* ed altri programmi hanno sostituito (stanno sostituendo) le tavole. Questi programmi "sanno" non solo integrare formule, ma anche come e quando applicarle.

Esempio 292 *Calcolare, usando Maple, il seguente integrale:* $\int \sin^2 x\,dx$

Soluzione.
Usando *Maple* si usa il comando

```
>int(sin(x)^2,x);
                    -1/2 cos(x) sin(x)+1/2 x
```

■

8.4.3 Esercizi

Calcolare i seguenti integrali, usando le tavole o un pacchetto software. Operare alcuni sostituzioni o completare i quadrati può essere d'aiuto.

1. $\displaystyle\int \frac{1}{3+2e^{5x}}\,dx;$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{x\,(2x+3)}\,dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\,(x-3)}\,dx;$

4. $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx;$

5. $\displaystyle\int \tan^3 5x\,dx;$

6. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{2x+1}}\,dx;$

7. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4x+5}\,dx;$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{4-x^2}\,dx;$

9. $\displaystyle\int x^2\sqrt{1-3x}\,dx;$

10. $\displaystyle\int \frac{4x+5}{(2x+3)^2}\,dx;$

11. $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{3x-2}}\,dx;$

12. $\displaystyle\int \frac{1}{(4x^2-9)^2}\,dx;$

13. $\displaystyle\int \frac{x+2}{2+x^2}\,dx;$

14. $\displaystyle\int \frac{3}{\sqrt{6x+x^2}}\,dx;$

15. $\displaystyle\int \frac{5}{4x^2+20x+16}\,dx;$

16. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}\,dx;$

17. $\displaystyle\int x^3\cos x^2\,dx;$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4x+3}}\,dx;$

19. $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+3x+2)^2}\,dx;\,;$

20. $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+5}\,dx;$

21. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4x+1}\,dx;$

22. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{3\sin^2 x-11\sin x-4}\,dx;$

23. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-e^x+1}}\,dx;$

24. $\displaystyle\int x\sin(3x+4)\,dx.$

Appendice A

I numeri Reali e le coordinate nel piano

I numeri reali, ci appaiono familiari, sono (sembrano) quelli che usiamo quotidianamente, quando misuriamo distanze, tempi, pesi ed altro. Sembra dunque un argomento banale, scontato. In realtà ci sono molte cose da dire, da imparare, che noi qui accenneremo semplicemente.
A tutti è nota l'esistenza dei numeri irrazionali (quale ad esempio $\sqrt{2}$)[1], numeri che non possono essere scritti come rapporto di interi (i numeri razionali). Quello che forse è meno noto è come sono distribuiti nei reali, se sono "di più" i razionali o gli irrazionali.
La risposta è sorprendente ed anche complicata da spiegare nella sua complessità. La "maggior parte" dei numeri reali sono irrazionali. se dovessimo pescare a caso tra i numeri reali, pescheremmo "quasi sempre" un irrazionale. D'altra parte i razionali sono tanti; in ogni intervallo, per quanto piccolo, ne possiamo trovare una infinità. Capire, spiegare e dimostrare in modo rigoroso queste affermazioni non è banale e ci sono corsi di matematica totalmente dedicati a questo soggetto. D'altra parte, la scienza si è sviluppata per secoli senza avere capito e sviluppato una teoria rigorosa. Newton, per esempio, ha sviluppato tutta la teoria della fisica classica senza avere a disposizione una teoria dei numeri reali che fu sviluppata più di un secolo dopo da Richard Dedekind.
Ci limitiamo qui a ricordare alcuni fatti elementari.

A.1 La retta reale

I numeri reali non sono "più reali" degli interi, dei razionali o dei numeri complessi. La ragione per l'aggettivo "reale" viene dal fatto che essi possono essere naturalmente rappresentati come una linea ininterrotta, infinita. Una volta che si è fissata un'origine ed una unità di distanza, ogni punto ha il suo numero ed ad ogni numero corrisponde un punto.

La rappresentazione sulla retta mostra come i numeri reali sono ordinati. *Muovendosi verso destra i numeri reali crescono.* Questo fatto importante lo

[1] La loro esistenza è nota sin dai tempi di Pitagora, 500 A.C. circa.

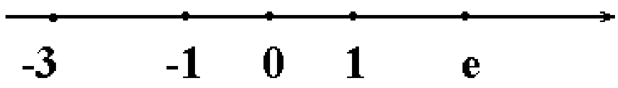


Figura A.1: Punti sulla retta reale

enunciamo nel seguente modo

$$a > b \text{ se e solo se } a \text{ sta a destra di } b\,.$$

A costo di ripeterci lo ripetiamo ancora una volta: per i numeri reali, "maggiore di" significa "stare alla destra di". Ne consegue che, per esempio $-3 > -4$, anche se -4 "appare" più grande di -3, perché -4 sta a sinistra di -3 nella rappresentazione dei numeri reali sulla retta.
Indicheremo con il simbolo $\mathbb{R}$ la retta dei numeri reali.

A.1.1 Sottoinsiemi dei reali

Nell'insieme dei numeri reali, così come in tutti gli insiemi, è possibile definire una vasta gamma di sottoinsiemi. Alcuni con una struttura facilmente descrivibile, altri complicati sia da descrivere che da rappresentare. Un esempio di sottoinsiemi non facilmente descrivibili potrebbe essere quello dei frattali. Nonostante che i più noti e disegnati siano quelle in due dimensioni, molti frattali hanno dimensione uno.
Fortunatamente, in Analisi per le cose che interessano questo corso, la maggior parte dei sottoinsiemi che ci interessano hanno una struttura facilmente interpretabile.

Notazione: Parentesi di vario tipo

Insiemi e sottoinsiemi appaiono in continuazione in matematica. L'uso delle parentesi ci permette una chiara e concisa descrizione degli insiemi.
Per esempio, supponiamo di voler dare una risposta alla domanda
Sia $f(x) = x^3 - x$. *Per quali valori reali di* x *si ha* $f(x) < 0$?
Al di là dei conti, se dovessimo esprimere la risposta in parole dovremmo dire che è *l'insieme dei numeri reali* x *tali che o* x *è minore di* -1 *o* x *sta tra* 0 *e* 1.
Come si capisce l'espressione è lunga e non facilmente leggibile. Nel linguaggio degli insiemi la stessa risposta è molto più concisa, è $\{x : x < -1 \text{ o } 0 < x < 1\}$.
Se letto, il simbolismo dice la stessa cosa espressa in parole sopra; in particolare il simbolo : vuol dire *tale che* (a volte si usa il simbolo | invece di :).

Vogliamo notare a questo punto che tre sono i tipi di parentesi che useremo, ognuna con un significato diverso, $()$, $[]$, $\{\}$.
Inoltre, l'Analisi richiede che si debba imparare elementi del linguaggio matematico come *chiuso, aperto, infinito, limitato, etc.* debbano essere imparati e capiti.

Intervalli

Gli intervalli sono "pezzi" della retta reale. Essi sono i più semplici, e spesso i più utili, sottoinsiemi dei reali. Gli intervalli possono avere proprietà diverse, possono essere limitati o infinitamente lunghi, possono contenere i loro estremi o meno. Gli **intervalli chiusi** contengono i loro estremi, gli **intervalli aperti** no.
La tavola seguente illustra le varie tipologie.

Tipologia degli intervalli

Intervallo	**Descrizione**	**Forma della disuguaglianza**
$(-2,3)$	intervallo *aperto*	$\{x : -2 < x < 3\}$
$[a,b]$	intervallo *chiuso*	$\{x : a \leq x \leq b\}$
$[2,b)$	intervallo *semiaperto*	$\{x : 2 \leq x < b\}$
$(5,+\infty)$	intervallo *infinito*	$\{x : x > 5\}$
$(-\infty,+\infty)$	intervallo *infinito*	

Ancora sui sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Presentiamo sotto ulteriori esempi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Studiare con attenzione l'uso della simbologia matematica, in special modo i simboli $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ per l'insieme dei naturali, degli interi e dei razionali rispettivamente. Ed ancora i simboli $\cup$ (unione) e $\cap$ (intersezione) per le operazioni tra insiemi. Queste notazioni sono standard in matematica e le useremo frequentemente

Sottoinsiemi dei reali

Insiemi	**Descrizione**	Notazione(i)
$\mathbb{R}$	I numeri reali	$(-\infty,+\infty)$
$\mathbb{N}$	I numeri naturali	$\{1,2,3,4,\dots\}$
$\mathbb{Z}$	I numeri interi	$\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\dots\}$
$\mathbb{Q}$	i numeri razionali	
$\{-7,3,8\}$	un insieme finito	$\{x : x = -7 \ o \ x = 3 \ o \ x = 8\}$
$(-1,3)\cup(4,6]$	unione di due intervalli	$\{x : -1 < x < 3 \ o \ 4 < x \leq 6\}$
$(1,6)\cap[4,7]$	intersezione degli intervalli	$\{x : 1 < x < 6 \ e \ 4 \leq x \leq 7\} = [4,6)$

A.1.2 Il simbolo ∞ : non è un numero

Ogni numero reale corrisponde ad un sol punto sulla retta reale. Il simbolo ∞ **non è un punto,** ∞ *non è un numero reale.*
Cosa rappresenta ∞ se non è un numero. ∞ è un simbolo che rappresenta l'idea

di illimitatezza, di lunghezza senza fine. Quando,per esempio, diciamo che la retta reale ha lunghezza infinita intendiamo dire che la retta prosegue senza fine.
Il simbolo ∞ è una notazione conveniente e semplice che sta ad indicare l'idea di "senza fine". Va usato con parsimonia ed attenzione e vedremo più avanti come costruire un'algebra degli infiniti.

A.1.3 Valore assoluto, distanza e disequazioni

L'idea di **valore assoluto** dovrebbe essere familiare sin dalla scuola media superiore. Il suo uso in espressioni semplici del tipo

$$|-3| = 3\,, \quad |\sin x| \leq 1\,, \quad \sqrt{x^2} = |\,x|$$

non dovrebbe causare alcun problema. Mentre è chiaro il suo significato in un contesto preciso come quelli sopra, è talvolta utile avere a disposizione una definizione formale di valore assoluto.

Definizione 293 ***(valore assoluto)***

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 \end{cases}$$

Per quanto sia familiare, il concetto di valore assoluto è spesso ostico in pratica, specialmente quando coinvolge la soluzione di disuguaglianze.
Le due considerazioni seguenti possono essere utili nell'affrontare questi tipi di problemi.

Criterio 294 ***(Interpretare il valore assoluto come distanza)*** *Dati due numeri a e b, $|a - b| = |b - a|$ rappresenta la distanza di a da b.*

Pensare al valore assoluto come distanza aiuta a visualizzare geometricamente le espressioni algebriche. Per esempio l'equazione

$$|x + 2| = 3$$

non è difficile da risolvere algebricamente (provare a trovare la soluzione), ma non ci fa capire il significato geometrico del problema. Proviamo a risolverlo interpretandola dal punto di vista della distanza. E'

$$|x + 2| = |x - (-2)| = \text{distanza di } x \text{ da } -2\,.$$

L'equazione $|x + 2| = 3$ dice che x dista tre unità di lunghezza da -2. Questo ci dice che le uniche soluzioni del problema sono $x = -5\,,\ x = 1$.

Nel calcolo si incontrano spesso disuguaglianze che implicano il valore assoluto, come ad esempio

$$|x + 2| \leq 3$$

Criterio 295 *Una disuguaglianza con il valore assoluto corrisponde a due disuguaglianze ordinarie.*

La disuguaglianza $|x+2| \leq 3$ è equivalente alle due disuguaglianze

$$-3 \leq x+2 \quad e \quad x+2 \leq 3$$

o più succintamente

$$-3 \leq x+2 \leq 3 \, .$$

Adesso è facile trovare la soluzione del problema che è data da

$$-5 \leq x \leq 1 \, .$$

In altre parole la disuguaglianza $|x+2| \leq 3$ vale per i valori di x che appartengono all'intervallo $[-5, 1]$ cioè l'insieme dei punti che distano tre unità o meno da -2.

Più generalmente, dati x ed il numero b è

$$\begin{aligned} |x| < b \quad &\text{se e solo se} \quad -b < x < b \\ |x| > b \quad &\text{se e solo se} \quad -b > x \;\text{ o }\; x > b \end{aligned}$$

(Regole simili valgono per le disuguaglianze $\leq$ e $\geq$)

Esempio 296 *Ogni intervallo, aperto o chiuso, può essere descritto in termini di **punto medio** e di **raggio**; anche in questo caso il valore assoluto aiuta. L'intervallo aperto* $(-3, 5)$ *per esempio, ha come punto medio* $x = 1$ *e raggio* 4 *perché la distanza di ogni punto dell'intervallo da* 1 *è minore di* 4. *Quindi* $(-3, 5)$ *corrisponde alla disuguaglianza* $|x-1| < 4$. *In linguaggio formale*

$$(-3, 5) = \{x : |x-1| < 4\}$$

■

Esempio 297 *Risolvere la disuguaglianza* $|2x+3| \leq 5$.

Soluzione. Seguendo il secondo criterio la disuguaglianza $|2x+3| \leq 5$ è equivalente a

$$-5 \leq 2x+3 \leq 5 \, .$$

Possiamo adesso usare le regole dell'algebra delle disuguaglianze per ottenere

$$-5 \leq 2x+3 \leq 5 \iff -8 \leq 2x \leq 2 \iff -4 \leq x \leq 1$$

(Il simbolo $\iff$ significa *se e solo se* ; esso significa che ogni lato implica l'altro). Se ne conclude che la disuguaglianza vale se e solo se x appartiene all'intervallo $[-4, 1]$. ■

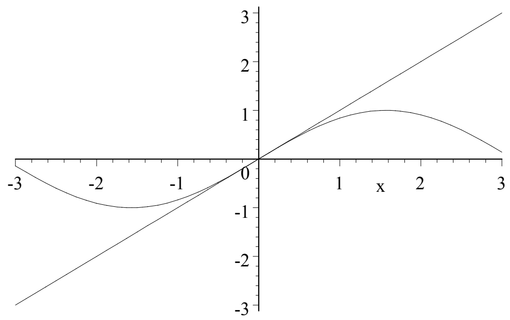
Esempio 298 *Risolvere* $|x-2| > |x+3|$.

Soluzione. Avendo il valore assoluto in entrambi i membri la situazione è più complicata. Una possibile (ma noiosa) strada per risolvere il problema è quella di guardare separatamente ai tre casi: $x < -3$, $-3 \leq x < 2$ e $x \geq 2$.
Un approccio più facile si ha interpretando entrambi i membri come una distanza. Con questa ottica la disuguaglianza ci dice che *x dista da 2 più che da* -3. Il punto medio tra -3 e 2 è $-1/2$, quindi la soluzione è data dai valori di x a sinistra del valore $-1/2$, cioè l'intervallo $(-\infty, 1/2)$. ■

Disuguaglianze appaiono anche in contesti più complessi. Vediamone un esempio.

Esempio 299 *Risolvere la disequazione* $|x - \sin x| < 0.1$

Soluzione. Come può interessare una disequazione di questo tipo? Perché ci interessa un problema di questo genere? Consideriamo i grafici delle due funzioni



I due grafici $y = x$ e $y = \sin x$

Il grafico ci dice che $\sin x \approx x$ quando $x \approx 0$. Ci interessa sapere in quale intervallo $y = x$ approssima $y = \sin x$ e quindi chiederci per quali valori di x le funzioni $y = x$ e $y = \sin x$ differiscono tra loro (per esempio) per meno di 0.1 che è l'espressione letteraria della nostra equazione $|x - \sin x| < 0.1$. Risolveremo la disequazione graficamente. Cominciamo considerando il grafico della funzione $y = x - \sin x$

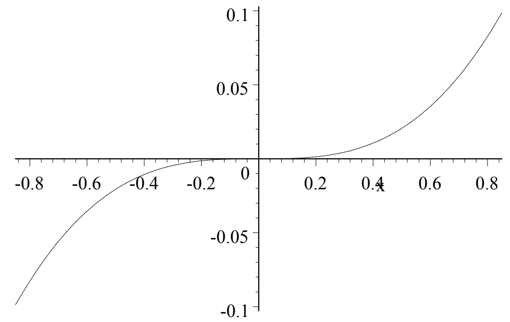
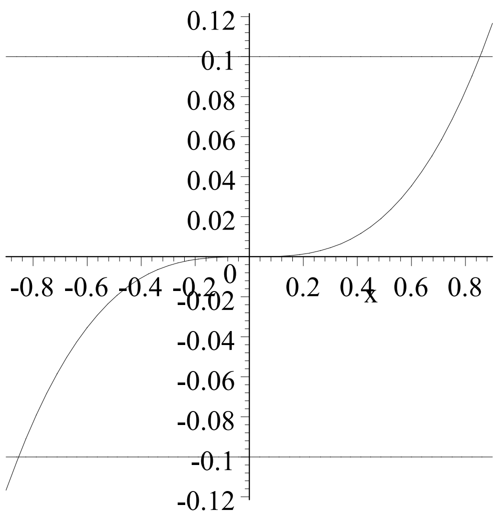


grafico di $y = x - \sin x$

Per vedere (in modo approssimativo) per quali valori di x vale la disuguaglianza $-0.1 < x - \sin x < 0.1$ riscriviamo il grafico di $x - \sin x$ dilatando l'asse delle ordinate e disegnando le rette $y = \pm 0.1$.



La retta $y = x - \sin x$ e le rette $y = \pm 0.1$

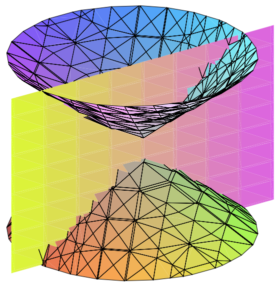
Si vede che la disuguaglianza vale (approssimativamente) per $-0.8 < x < 0.8$. ■

A.1.4 Coordinate nel piano

L'idea di poter determinare la posizione dei punti del piano usando il concetto di coordinate risale al filosofo francese René Descartes (Cartesio). L'idea di Descartes, che sembra oggi naturale, fu un'idea tra le più feconde della matematica.
L'idea è importante perché lega tra di loro la geometria, l'algebra e l'analisi. La geometria studia le figure - linee, curve, circonferenze, etc. - nel piano. L'algebra studia le operazioni - addizioni, moltiplicazioni, etc. - sui numeri e le funzioni. L'analisi, più difficile da definire, include le principali idee legate allo studio delle funzioni, delle derivate e gli integrali.
Prima di Cartesio la geometria era relativamente isolata rispetto alle altre branche della matematica, i geometri usavano il compasso e gli altri strumenti da disegno per costruire e misurare le figure piane. Figure che non fossero basate su cerchi e linee erano difficili da disegnare e calcolare. La parabola, per esempio, veniva descritta geometricamente come l'insieme dei punti equidistanti da un punto ed una linea prefissata. Le proprietà della parabola (come per esempio la **proprietà di riflessione**: tutti i raggi paralleli all'asse di simmetria passano per lo stesso punto, **il fuoco)** erano difficili da capire ed interpretare usando solo l'approccio geometrico.
Il grande vantaggio delle coordinate cartesiane è che esse permettono una *descrizione algebrica* delle figure geometriche del piano. L'espressione algebrica

$y = x^2$, per esempio, descrive la parabola in una forma che è più semplice e conveniente che non le sue proprietà geometriche. Quando le figure geometriche vengono descritte in forma algebrica possono essere usate le proprietà dell'algebra e dell'analisi. La connessione, inoltre, va in entrambe le direzioni: l'intuizione geometrica permette di fornire elementi di interpretazione dei problemi algebrici ed analitici.

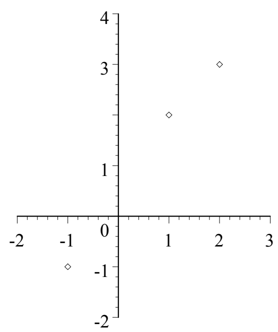
Questo legame è l'essenza della **geometria analitica**. Nella sua forma più nota e semplice, la geometria analitica studia le proprietà di linee, circonferenze, ellissi, parabole ed iperboli. Queste figure vengono chiamate **sezioni coniche** perché possono essere pensate come sezioni (cioè tagli) di un cono (il cono in questione è un cono cavo).



Il cono ed una sua sezione

A.1.5 Sistemi di coordinate

Un **sistema di coordinate cartesiane** nel piano è formato da tre parti: due assi perpendicolari tra di loro, ognuno con la sua scala e l'origine dei due assi nel loro punto di intersezione. Per convenzione l'asse delle x è quello orizzontale e la direzione positiva è quella da sinistra a destra, mentre l'asse y è verticale con direzione positiva dal basso verso l'alto. Con il sistema di coordinate fissato, le coordinate di ogni punto del piano è ben definita.



I punti $(-1,-1)\,,(2,1)\,,(2,3)$

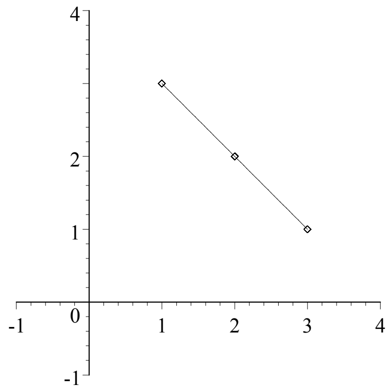
Un sistema di coordinate definisce una corrispondenza biunivoca tra i punti del piano e le coppie di numeri reali. Ad ogni punto del piano corrispondono due coordinate e viceversa.

Usando le coordinate cartesiane possiamo risolvere algebricamente molte questioni geometriche.

Punto mediano Ricordiamo che se x_1 e x_2 sono due punti sulla retta reale, il valore medio tra i due è dato da $m = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

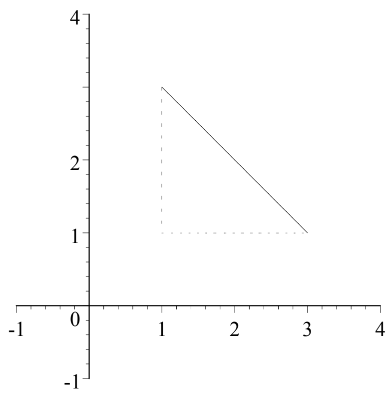
Situazione analoga si ha nel piano. Per trovare il punto medio M del segmento che unisce il punto $P = (x_1, y_1)$ con il punto $Q = (x_2, y_2)$ è sufficiente trovare la media delle singole coordinate

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



(2,2) punto medio tra (3,1) e (1,3)

Distanza Sulla retta la situazione è semplice, la distanza tra i punti x_1 e x_2 è data da $|x_1 - x_2|$. La formula della distanza nel piano deriva dal teorema di Pitagora



$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} \end{aligned}$$

Stabilita la formula della distanza, si può verificare che dati i punti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$, il punto medio M è equidistante da P e Q.

$$\begin{aligned} d^2(P, M) &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_1\right)^2 \\ &= \frac{(x_1 - x_2)^2}{4} + \frac{(y_1 - y_2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1 + y_2}{2} - y_2\right)^2 \\ &= d^2(M, Q) \end{aligned}$$

La formula della distanza tra due punti e del punto medio ci permettono di poter descrivere figure geometriche più interessanti, quali ad esempio.

Circonferenza La definizione di circonferenza è: *il luogo dei punti equidistanti da un punto fissato $C = (a, b)$ detto centro.* Indicata con r la distanza dal centro *(raggio)*, la formula della distanza ci dice che un punto $P = (x, y)$ appartiene alla circonferenza se e solo se

$$d(P, C) = r\ .$$

Esplicitando si ha

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

o, equivalentemente

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\ .$$

Esempio 300 *Trovare l'equazione algebrica della circonferenza di raggio* 5 *centrata in* $C = (3, 2)$.

Soluzione. Il punto $P = (x, y)$ appartiene alla circonferenza se e solo se $d(P, C) = 5$. Si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 2)^2} = 5 &\iff (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25 \\ &\iff x^2 + y^2 - 6x - 4y + 13 = 25 \\ &\iff x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \end{aligned}$$

■

Esempio 301 *L'equazione* $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 10$ *rappresenta una circonferenza? Se si, trovare il centro ed il raggio.*

Soluzione. Cerchiamo di completare i quadrati rispetto alle variabili x ed y. Scriviamo

$$\begin{aligned} x^2+4x &= x^2+4x+4-4=(x+2)^2-4 \\ &\text{e} \\ y^2-2y &= y^2-2y+1-1=(y-1)^2-1 \end{aligned}$$

Riscriviamo l'equazione data nella forma

$$\begin{aligned} x^2+4x+y^2-2y=10 &\iff (x+2)^2-4+(y-1)^2-1=10 \\ &\iff (x+2)^2+(y-1)^2=15 \end{aligned}$$

La risposta è adesso ovvia. L'equazione descrive la circonferenza di centro $(-2,1)$ e raggio $r=\sqrt{15}$. ■

Esempio 302 *Mostrare che la seguente affermazione è vera. "Il segmento che unisce i due punti mediani di due lati di un triangolo è parallelo al terzo lato e ha lunghezza metà"*

Soluzione. Con una opportuna scelta del sistema di riferimento, possiamo pensare di avere i tre vertici del triangolo nei punti $A=(0,0)\,,B=(a,0)\,,C=(b,c)\,$. Per provare la prima parte dell'affermazione basta mostrare che il segmento che unisce i punti medi dei segmenti $\overline{A\,C}$ e $\overline{B\,C}$ è orizzontale, o che è lo stesso, che i due punti hanno la stessa ordinata. Indicato con m_1 il punto medio di $\overline{A\,C}$ e con m_2 il punto medio di $\overline{B\,C}$, si ha

$$m_1=\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right) \quad \text{e} \quad m_2=\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)\ .$$

Quindi m_1 e m_2 hanno la stessa coordinata y come richiesto. La lunghezza del segmento $\overline{m_1\,m_2}$ è

$$\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\right)^2}=|a|$$

che è la lunghezza del lato $\overline{A\,B}$. ■

A.2 Esercizi

1. Esprimere ognuno dei seguenti intervalli come disuguaglianza con valore assoluto.
   (a) $(0, 10)$
   (b) $[-\pi, \pi]$
   (c) $(-2, 4)$
   (d) $(1, 8)$
   (e) $[-3, 7]$
   (f) $[-10, -2]$

2. Esprimere i seguenti insiemi usando disuguaglianze con valore assoluto.
   (a) $\{x : x < -3 \ \text{ o } \ x > 3\}$
   (b) $\{x : x < -5 \ \text{ o } \ x > 3\}$
   (c) $\{x : x < -7 \ \text{ e } \ x < 3\}$
   (d) $\{x : x < -7 \ \text{ e } \ x < 5\}$

3. Esprimere ognuno dei seguenti insiemi usando la notazione degli intervalli.
   (a) $\{x : -10 \leq x < 15\}$
   (b) $\{x : -6 \leq x < 4\}$
   (c) $\{x : -13 < x < 17\}$
   (d) $\{x : |x| \leq 3\}$
   (e) $\{x : |x - 2| \leq 5\}$
   (f) $\{x : |x + 3| \leq 4\}$
   (g) $\{x : |x - a| < b\}$
   (h) $\{x : |x - a| < a\}$

4. Trovare la distanza tra le seguenti coppie di punti
   (a) $(0, 0)$ e $(2, 3)$, $(1, 2)$ e $(3, 4)$
   (b) $(-4, 2)$ e $(-7, -4)$, $(-5, -2)$ e $(2, 5)$.

5. Spiegare perché $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2}$.

6. Trovare i punti del piano $x\,y$ che distano 13 dal punto $(1, 2)$ ed hanno coordinata y uguale a -3.

7. Trovare l'equazione algebrica della circonferenza di raggio 4 centrata in $(-3, 7)$.

8. Dire se $x^2 + y^2 - 6x - 8y = -9$ è l'equazione di una circonferenza. Se si, quale?

9. Mostrare che $3x^2+3y^2+4y=7$ è l'equazione di una circonferenza. Trovare raggio e centro.

10. Sapendo che $3 < r < 7$ spiegare perché le seguenti affermazioni sono vere

    (a) $|r| < 7\,,\ \ |r| > 3\,,\ \ |r-5| < 2$

11. Supponiamo che x sia un numero reale tale che $-2 \leq x \leq 1$

    (a) è vero che $|x| \leq 1$?
    (b) è vero che $|x| \leq 2$?
    (c) è vero che $|x| \leq 10$?

12. Supponiamo che sia $L \leq x \leq M$. Mostrare che $\left|x - \frac{1}{2}(L+M)\right| \leq \frac{1}{2}(M-L)$.

13. Supponiamo che sia $|x-3| \leq 0.005$ e $|y-2| \leq 0.003$.
    Trovare A e B tali che $|(x+y)-A| \leq B$.

A.2.1 Una Dimostrazione con ε e δ.

Ricordiamo la definizione formale di limite.

Definizione 303 *Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un $\delta > 0$ tale che*

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad per \quad 0 < |x - a| < \delta \,.$$

Allora

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \,.$$

Dimostriamo il seguente Teorema:

Teorema 304 *Supponiamo che:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

dove L e M sono numeri finiti. Allora

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = L + M \,.$$

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un $\delta > 0$ tale che

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |(f(x) + g(x)) - (L + M)| < \varepsilon \,.$$

Dato $\varepsilon > 0$, bisogna trovare il δ conseguente. Scegliamo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon/2$. Poiché ε_1 e ε_2 sono positivi, esistono δ_1 e δ_2 positivi, tali che

$$\begin{aligned} 0 < |x - a| < \delta_1 &\Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon_1 \,; \\ 0 < |x - a| < \delta_2 &\Longrightarrow \quad |g(x) - M| < \varepsilon_2 \,. \end{aligned}$$

Se adesso scegliamo δ più piccolo di δ_1 e δ_2 si ottiene che

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad |g(x) - M| < \varepsilon_2 \,,$$

così

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + M)| &\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon \,. \end{aligned}$$

■