Capitolo 7

Il Calcolo delle Aree e l'Integrale

Il problema della retta tangente ed il problema dell'area sono i due problemi geometrici principali dell'Analisi. Come abbiamo visto, il concetto di derivata, insieme alle regole per il suo calcolo, risolve il problema della retta tangente e le sue conseguenze. Siamo ormai in grado, anche per funzioni molto complicate, di risolvere questo tipo di problema.

7.1 Il Problema del Calcolo dell'Area e l'Integrale

Il problema generale del calcolo dell'area è quello di conoscere la misura dell'area per una regione piana. Per regioni molto speciali - rettangoli, triangoli, circonferenze, trapezi e così via - conosciamo le formule per il suo calcolo.

Il problema del calcolo dell'area E' più complicato, ma anche più interessante, il problema del calcolo dell'area per regioni limitate da curve meno semplici, come, per esempio, i grafici delle funzioni. Un tipico problema di questo tipo è quello di misurare il valore di un'area come quella della figura.

Quanto vale l'area ?

Presentato correttamente, il problema si enuncia nel seguente modo:

Trovare l'area della regione limitata superiormente dal grafico della funzione f, inferiormente dall'asse x, a sinistra dalla retta verticale $x = a$, a destra dalla retta $y = b$.

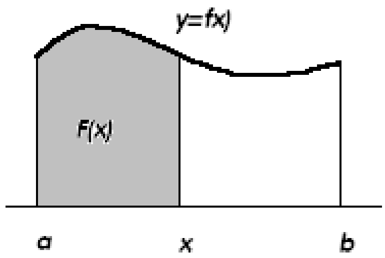
Usualmente diremo "*L'area sotto il grafico di f tra a* e b.

7.1.1 L'Integrale come Area

Iniziamo considerando il caso di una funzione f *continua nell'intervallo* $[a, b]$. Per il momento assumiamo anche che $f(x) \geq 0$ per tutti gli $x \in [a, b]$.

Facendo appello all'intuizione geometrica, definiamo la funzione $F(x)$ come il valore dell'area sotto il grafico di f, tra a e x.

Il seguente disegno, mostra cosa intendiamo.



Abbiamo perciò, $F(a) = 0$. L'area tra a ed a vale zero.

Mostriamo adesso una importante proprietà di regolarità di F

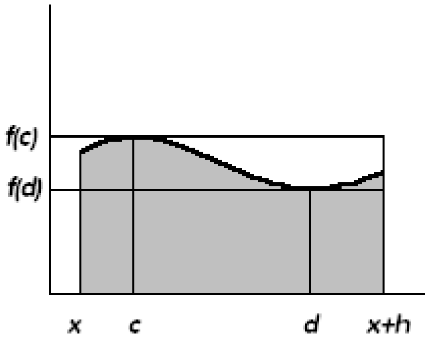
Teorema 241 *La funzione $F(x)$ è differenziabile e la sua derivata è $f(x)$.*

Dimostrazione. poiché abbiamo definito F in modo geometrico, cercheremo di ragionare geometricamente.

Per dimostrare che F è differenziabile, bisogna mostrare che per ogni $x$esiste il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Cominciamo col supporre che $x < b$, e per semplicità di ragionamento, supponiamo $h > 0$. Allora $F(x+h) - F(x)$ è l'area racchiusa tra x ed $x+h$.



$F(x+h) - F(x)$

Poiché f è continua in $[x, x+h]$ per il TVE ammette minimo e massimo. Indichiamo con c il punto di massimo e con d quello di minimo.

Allora, si ha che

$$f(d) \leq f(t) \leq f(c)$$

per tutti i t tali che

$$x \leq t \leq t+h$$

(siamo stati forzati ad usare un'altra lettera per indicare l'ingresso, perché x è già in uso).

L'area sotto la curva, tra x ed $x+h$ è maggiore dell'area del rettangolo di base h ed altezza $f(d)$ e minore del rettangolo di base h ed altezza $f(c)$, cioè

$$h \cdot f(d) \leq F(x+h) - F(x) \leq h \cdot f(c) .$$

Ne segue che

$$f(d) \leq \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq f(c) ..$$

Poiché c e d appartengono all'intervallo $[x, x+h]$, ne segue che entrambi tendono ad x quando $h \to 0$. D'altra parte, la continuità di f fa si che $f(d) \to f(x)$ e$f(c) \to f(x)$ quando $h \to 0$. Ne segue perciò

$$f(x) = \lim_{h\to 0} f(d) \leq \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} f(c) = f(x) .$$

Il teorema dei carabinieri implica infine che

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) .$$

Il ragionamento, nel caso di $h < 0$ è sostanzialmente identico.

Infine, il caso $x = b$ lo si tratta considerando solo il caso $h < 0$. Lasciamo queste ultime parti per esercizio. ■

Il teorema ci dice una cosa importantissima. Per calcolare l'area, basta conoscere una primitiva della funzione f. Infatti, sia G una primitiva di f, cioè una funzione tale che $G'(x) = f(x)$. Poiché sappiamo che due primitive della stessa funzione differiscono tra loro per una costante, si ha che

$$F(x) = G(x) + C.$$

Poniamo $x = a$, si ha:

$$0 = F(a) = G(a) + C$$

dalla quale si ottiene $C = -G(a)$. Ponendo, infine $x = b$ si ottiene

$$F(b) = G(b) - G(a).$$

Quindi, l'area, sotto il grafico di f tra a e b, vale $G(b) - G(a)$.

Enunciamo questo risultato sotto forma di teorema.

Esempio 242 *Trovare l'area sotto la curva $y = x^2$, tra $x = 1$ e $x = 2$.*

Soluzione. L'area che vogliamo trovare è quella indicata in figura.

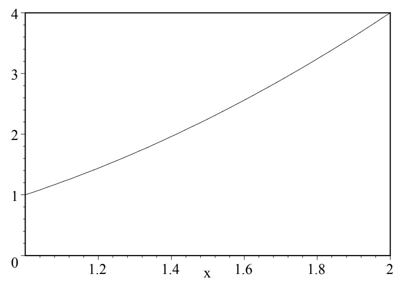


Grafico di $y = x^2$, $x \in [1, 2]$

Noi sappiamo che una primitiva di $f(x) = x^2$ è la funzione $G(x) = x^3/3$. L'area sotto il grafico di f, per $x \in [1, 2]$ è quindi data da:

$$G(2) - G(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

■

Esempio 243 *Trovare l'area sotto il grafico di $f(x) = \sin x$, con x tra 0 e π.*

Soluzione. Il grafico di $\sin x$, per $x \in [0, \pi]$ è rappresentato nel grafico.

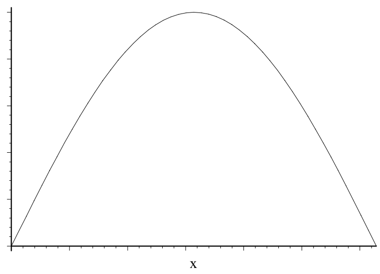


Grafico di $\sin x,\ x \in [0, \pi]$

Una primitiva della funzione data è la funzione $G(x) = -\cos x$, infatti si ha che $G'(x) = \sin x$.

La funzione è positiva e continua nell'intervallo assegnato, quindi l'area racchiusa è data da

$$G(\pi) - G(0) = -\cos\pi - (-\cos(0)) = -(-1) - (-1) = 2\,.$$

L'area racchiusa dal grafico di $\sin x$, per $x \in [0, \pi]$ vale 2. ■

Possiamo, adesso dare la seguente definizione:

Definizione 244 *Sia f una funzione definita nell'intervallo $a \leq x \leq b$. Le due espressioni equivalenti*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\ dx$$

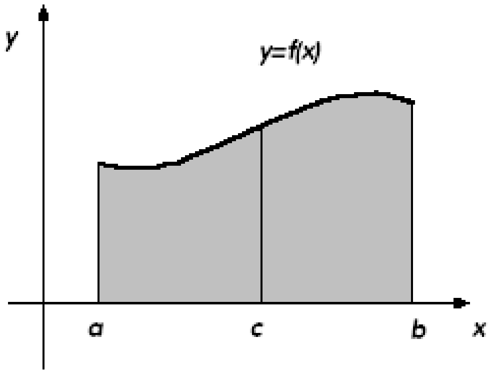
indicano il valore dell'area (con segno) limitato da $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ e l'asse delle x.

Osservazioni.

- Entrambe le espressioni $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)\ dx$ si leggono "**integrale di f tra a e b**". La funzione f si chiama **integrando**.
- Le due forme $\int_a^b f$, $\int_a^b f(x)\ dx$ indicano la stessa area. La prima sembra essere più semplice e sarà quella che useremo per ora. L'altra forma ha vantaggi che vedremo più avanti.

Proprietà dell'Integrale

L'approccio geometrico ci permette di individuare con semplicità alcune delle proprietà fondamentali dell'integrale. Per esempio, la figura



$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

è convincente nell'illustrare la seguente semplice proprietà dell'integrale:

Se $a < c < b$, *allora* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Il prossimo teorema raccoglie alcune delle proprietà principali dell'integrale

Teorema 245 *Siano* f *e* g *funzioni continue nell'intervallo* $[a, b]$, *e* k *una costante. Allora:*
1) $\int_a^b f \pm g = \int_a^b f \pm \int_a^b g$;

2) $\int_a^b k \cdot f = k \cdot \int_a^b f$;

3) Se $f(x) \leq g(x)$ *per tutti gli* $x \in [a, b]$, *allora* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$;

4) Se $a < c < b$, *allora* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Osserviamo meglio le proprietà esposte:

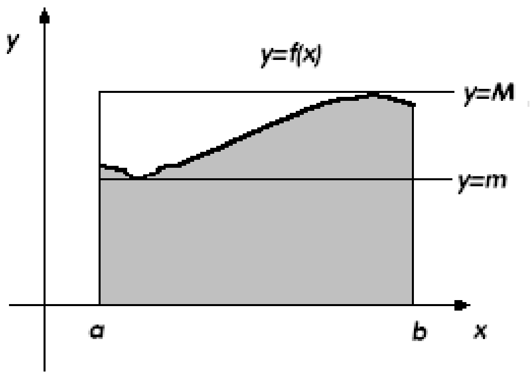
Stesso Comportamento delle Derivate. Le prime due proprietà sono identiche a quelle trovate per le derivate. Come le derivate, l'integrale si comporta bene rispetto alla somma di funzioni ed al prodotto per una costante.

Un Caso Particolare Molto Utile. la terza proprietà è spesso usata nel caso in cui una delle due funzioni, f o g sono delle costanti. Eccone una versione che utilizzeremo ancora in seguito

Affermazione 246 *Supponiamo che valga la disuguaglianza* $m \leq f(x) \leq M$ *per qualche valore delle costanti* m *ed* M. *Allora si ha*

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f \leq M \cdot (b - a) \ .$$

A tale proposito, basta ricordare il TVE per funzioni continue nel"intervallo limitato e chiuso $[a, b]$.

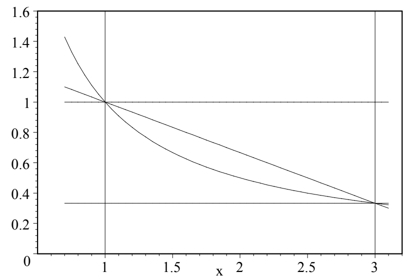


$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f \leq M \cdot (b-a)$$

Come illustra il disegno, il valore dell'integrale, (cioè dell'area della regione in grigio) giace tra il rettangolo inferiore e quello superiore.

Ancora un esempio per illustrare un possibile uso del teorema.

Esempio 247 *Sia* $f(x) = 1/x$. *Stimiamo il valore dell'integrale di* f *nell'intervallo* $[1, 3]$, *considerando le funzioni:*$g_1(x) = 1/3$, $g_2(x) = 1$ *e* $g_3(x) = 1 - 1/3(x-1)$.



Una stima per $\int_1^3 f$

Soluzione. Noi sappiamo che una primitiva della funzione $f(x) = 1/x$ è la funzione $G(x) = \ln x$ e quindi che il valore dell'area è dato da $G(3) - G(1) = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$; tuttavia siamo interessati ad averne un'approssimazione semplice.

Il teorema precedente ci dice che

$$\int_1^3 g_1 \leq \int_1^3 f \leq \int_1^3 g_2 \iff \frac{2}{3} \leq \int_1^3 f \leq 2\,.$$

la limitazione superiore scelta g_2 non è molto buona. Una limitazione superiore migliore la si ottiene scegliendo la funzione $g_3 = -\frac{1}{3}x + 4/3$. Anche in questo caso si ha

$$\int_1^3 f \leq \int_1^3 g_3$$

D'altra parte, usando le proprietà 1) e 1) del teorema precedente, abbiamo che una primitiva di $-\frac{1}{3}x$ è $-\frac{1}{6}x^2$, una primitiva di $4/3$ è $\frac{4}{3}x$. Ne consegue quindi che, una primitiva di $g_3(x)$ è la funzione $G(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{3}x$ ed il valore dell'area sottesa dal grafico di g_3 è quindi data da $G(3) - G(1) = \left(-\frac{9}{6} + 4\right) - \left(-\frac{1}{6} + \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$. Combinando i risultati ottenuti, abbiamo che $\frac{2}{3} \leq \ln 3 \leq \frac{4}{3}$. ■

Esempio 248 *Usando il fatto che* $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2$, *trovare* $\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx$ *e* $\int_0^{\pi} (3\sin x + 2\cos x) \, dx$.

Soluzione. Le simmetrie dei grafici delle funzioni seno e coseno rispetto alla retta $x = \pi/2$ ci dicono che

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 1\,; \qquad \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 0\,.$$

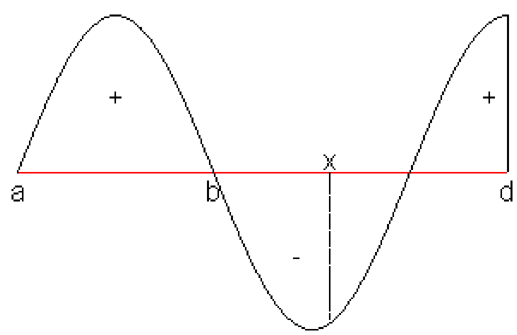
Quindi, usando la regola della somma e della moltiplicazione per uno scalare, si ha

$$\int_0^{\pi} (3\sin x + 2\cos x) \, dx = 3 \int_0^{\pi} \sin x \, dx + 2 \int_0^{\pi} \cos x \, dx = 6 + 0 = 6\,.$$

■

7.1.2 Caso di Funzioni Non Necessariamente Positive

Se abbiamo a che fare con una funzione f che può cambiare segno nell'intervallo di integrazione, possiamo ancora usare la nozione d'area per trovare la funzione $F(x)$. Tuttavia, in quei pezzi, dove la funzione è negativa, bisogna considerare F abbia come valore di F quello dell'area cambiata di segno. Illustriamo questo fatto con il seguente disegno.



Integrale di una funzione

In questo caso, il valore di $F(x)$ è rappresentato dal valore dell'area tra a e b, meno l'area tra b ed x (per il punto x indicato in figura). L'argomento che $F'(x) = f(x)$ si dimostra come nel caso precedente.

Come detto, gli integrali misurano il valore delle aree con segno. Nel calcolare gli integrali, le aree sopra il grafico di f e sotto l'asse delle x vano contate con segno negativo. Quindi, se un integrando f assume valori negativi in un intervallo $[a, b]$, così potrebbe essere per $\int_a^b f$.

Esempio 249 *Sia $f(x) = 1 - x^2$. Trovare (o stimare) i valori degli integrali $I_1 = \int_0^2 f$, $I_2 = \int_{-2}^2 f$.*

Soluzione. Iniziamo, considerando l'integrale I_1.

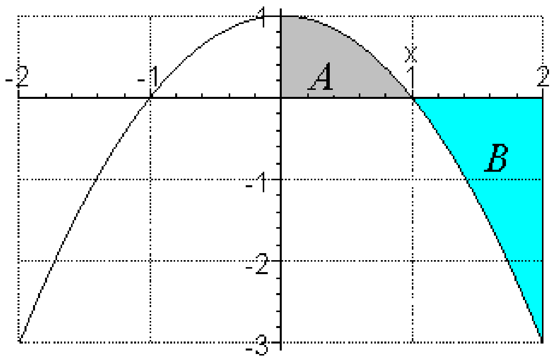


Grafico di $1 - x^2$

I_1 è la somma, dell'area A (positiva) con l'area B (negativa).
si ha che

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^2 \left(1 - x^2\right) = Area\,(A) + Area\,(B) \\ &= \int_0^1 \left(1 - x^2\right) + \int_1^2 \left(1 - x^2\right) \end{aligned}$$

D'altra parte noi sappiamo che una primitiva di $f(x) = 1 - x^2$ è data da $F(x) = x - x^3/3$, quindi

$$\begin{aligned} Area\,(A) &= F(1) - F(0) = 1 - 1/3 = 2/3 \\ Area\,(B) &= F(2) - F(1) = (2 - 8/3) - 1/3 = -2/3 - 1/3 = -1 \end{aligned}$$

Ne segue che

$$I_1 = \int_0^2 \left(1 - x^2\right) = 2/3 - 1 = -1/3\,.$$

Consideriamo adesso l'integrale I_2. Sappiamo che $1-x^2$ rappresenta l'equazione di una parabola che ha l'asse $x = 0$ come asse di simmetria. Quindi il grafico di

$1-x^2$, nell'intervallo $[-2,0]$ è simmetrico rispetto a quello nell'intervallo $[0,2]$. Ne segue che

$$\int_{-2}^{0}\left(1-x^2\right)=\int_{0}^{2}\left(1-x^2\right) ,$$

quindi $I_2 = 2\cdot I_1 = 2\cdot(-1/3) = -2/3.$ ■

Esempio 250 *Sia $g(x)=x^3$. Calcolare $\int_{-1}^{1} g(x)\ dx$ e $\int_0^1 g(x)\ dx$*

Soluzione. Cominciamo osservando il grafico della funzione nell'intervallo $[-1,1]$.

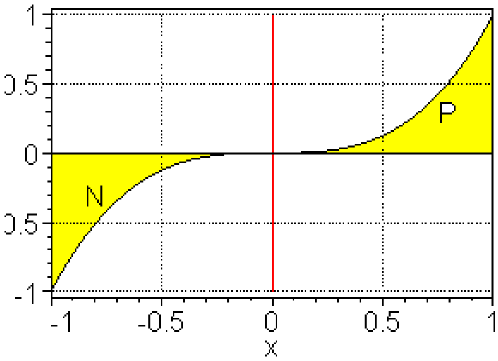


Grafico di $y = x^3$

Vista la simmetria del grafico, è chiaro che le aree positiva P e negativa N hanno segno opposto, quindi $\int_{-1}^{1} g(x)=0$. Lo stesso risultato lo si ottiene dal calcolo. Infatti, una primitiva di $g(x)=x^3$ è $G(x)=x^4/4$ e si ha

$$\int_{-1}^{1} g(x) = x^4/4\Big|_{x=-1}^{x=1} = 1/4-1/4=0\,.$$

Per quanto riguarda $\int_0^1 g(x)$ si ha

$$\int_{0}^{1} g(x) = x^4/4\Big|_{x=0}^{x=1} = 1/4\,.$$

■

NOTA: La simbologia $f(x)|_{x=a}^{x=b}$ significa $f(b)-f(a)$.

7.1.3 Valor Medio ed Integrale

Abbiamo indicato, in precedenza, tra le proprietà importanti dell'integrale quella dell'esistenza di due costanti m ed M per le quali si ha

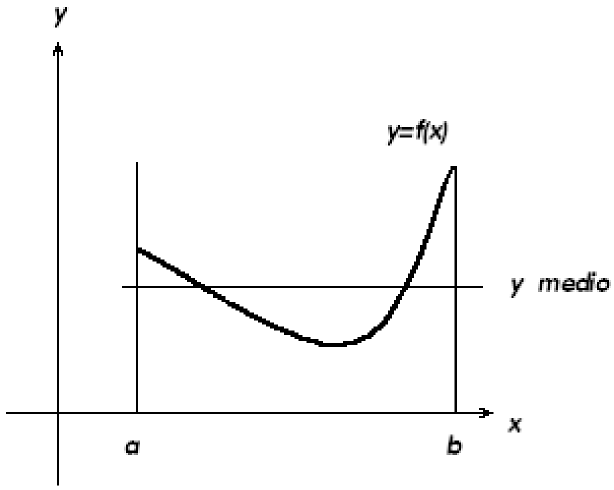
$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f\le M\cdot(b-a)\ .$$

Ne discende, che il numero $\frac{\int_a^b f}{(b-a)}$ è compreso nell'intervallo $[m,M]$. Ne discende, in modo ovvio, la seguente definizione.

Definizione 251 *Sia f una funzione continua definita nell'intervallo $[a,b]$. La quantità*

$$\frac{\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)}$$

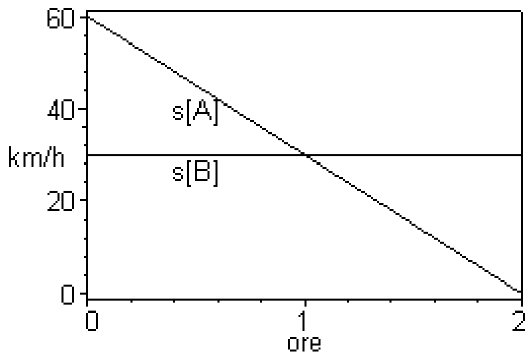
rappresenta il ***valor medio*** *di f in $[a,b]$.*



Valor medio di una funzione: uguale area

La precedente figura, rende l'idea di cosa intendiamo,geometricamente, per valor medio. E' l'altezza di un rettangolo che ha la stessa area dell'integrale dato.

Il seguente grafico mostra le funzioni velocità $s[A]$ ed $s[B]$ di due auto, A e B. espresse in km/h.



Qual'è il valor medio di velocità nell'intervallo $[0,2]$?

Soluzione. Un'occhiata alle aree mostra immediatamente che

$$\int_0^2 s[A](t)\,dt = 60 = \int_0^2 s[B](t)\,dt\,.$$

Quindi, usando la definizione precedente, si ottiene che in entrambi i casi la velocità media è di $30\,km/h$. La risposta ha un significato fisico chiaro: l'area sotto le due curve rappresenta la distanza totale percorsa dalla due auto nel tempo di $2\,h$. La divisione della distanza percorsa, per il tempo impiegato a percorrerla, corrisponde alla velocità media di percorrenza. ■

Interpretare l'Integrale

Fino ad ora abbiamo interpretato l'integrale $\int_a^b f$ essenzialmente in termini geometrici. L'integrale ha molte altre interpretazioni alcune delle quali incontreremo più avanti. Il moto fisico è uno degli esempi più significativi.

Velocità e Distanza

Se $f(t)$ rappresenta la velocità di un oggetto che si muove nel tempo, il suo integrale $\int_a^b f$, rappresenta la distanza totale percorsa dall'oggetto nell'intervallo di tempo $[a, b]$.

Se, indichiamo adesso con $v(t)$ la velocità col suo segno, cioè con l'indicazione della direzione di moto, $\int_a^b v$ ci da un'informazione diversa. Ci dice qual'è la distanza netta percorsa, a partire dal punto iniziale di moto, nell'intervallo di tempo $[a, b]$. In particolare, la distanza netta percorsa, può essere positiva o negativa.

Estremi di Integrazione: un Fatto Tecnico

La descrizione in lingua italiana del simbolo $\int_a^b f$ "integrale da $x = a$ a $x = b$ di f", implica una *direzione*: x parte da a ed arriva fino a b. E' naturale, per noi pensare di muoversi da sinistra verso destra, ed è quello che abbiamo fatto fino ad ora, supponendo sempre $b \geq a$. Per esempio, abbiamo discusso

$$\int_0^\pi \sin x\,dx\,, \quad \text{ma non} \quad \int_\pi^0 \sin x\,dx \quad \text{o} \quad \int_\pi^0 (3\sin x + 2\cos x)\;dx$$

Vi sono situazioni in cui quest'ultimo fatto può accadere. La seguente convenzione, basata sul segno, risolve il problema

$$\int_a^b f(x)\;dx = -\int_b^a f(x)\;dx\,. \tag{7.1}$$

La convenzione afferma, per esempio, che se $\int_0^1 x^3\,dx = 1/4$, allora

$$\int_1^0 x^3\,dx = -\int_0^1 x^3\,dx = -1/4\,.$$

In che modo possiamo dare una spiegazione intuitiva alla convenzione 7.1? Se pensiamo ad un contesto di moto, la regola appare chiara. Essa infatti afferma che:

> *Se $f(t)$ rappresenta la velocità di un mezzo al tempo t e $a < b$, allora $\int_a^b f$ rappresenta la distanza (positiva) percorsa nell'intervallo di tempo a partire dall'istante a fino all'istante b. E' ragionevole quindi, pensare come negativa quella che viene percorsa a ritroso nel tempo.*

7.2 Il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale. Sviluppo

All'Inizio del capitolo, abbiamo dimostrato in forma intuitiva il seguente teorema, che adesso ri-enunciamo, tenendo anche conto delle successive osservazioni sul segno di una funzione f

Teorema 252 *(Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) (TFCI) Sia f una funzione continua, definita nell'intervallo $[a, b]$. Allora, per ogni $a \leq x \leq b$, la funzione*

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int_a^x f(t)\, dt$$

è continua in $[a, b,]$, differenziabile in (a, b), e

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)\ .$$

Facciamo alcune osservazioni:

Perché continua ? La richiesta che la funzione f sia continua, assicura (è condizione sufficiente) che l'integrale esista. Eventuali discontinuità di f inoltre (ad esempio un salto), creerebbero difficoltà alla regolarità di F.

Perché differenziabile in (a, b)? Lavorare in un intervallo aperto evita di dover considerare situazioni in cui si hanno solo limiti destri o sinistri, ma è essenzialmente un fatto tecnico, più che strutturale.

Altra formulazione. L'ultima relazione nel TFCI può essere anche scritta nella forma

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x)\ .$$

Esempio 253 *Sia $f(x) = 2x \sin x^2$ e sia $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$. Trovare un espressione esplicita per $F(x)$. Interpretare il risultato geometricamente.*

Soluzione. Il TFCI risolve il problema posto. Ci dice che F *è una primitiva di* f, ciò che dobbiamo fare è trovare quella giusta. Cominciamo col notare che per ogni valore della costante C, la funzione $f(x) = -\cos x^2 + C$ è una primitiva di f., quindi si ha che

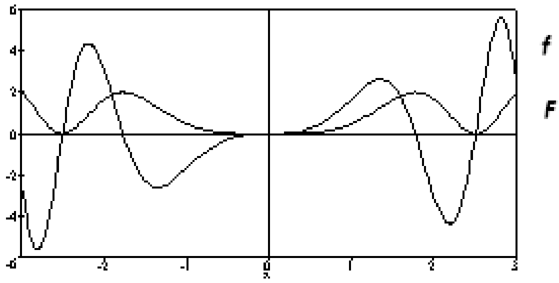
$$F(x) = -\cos x^2 + C \quad \text{per qualche valore della costante } C\,.$$

Per scegliere il valore giusto di C, basta ricordare che deve essere $F(0) = 0$ e quindi

$$0 = F(0) = -\cos 0 + C = -1 + C \implies C = 1\,.$$

ne segue che $F(x) = -\cos x^2 + 1$.

Per avere un "controllo geometrico" sul risultato descriviamo sullo stesso disegni0, il grafico di f e di F



Grafici di $2x \sin x^2$ e di $-\cos x^2 + 1$

Come ci aspettiamo, il grafico di F sembra descrivere la crescita dell'area (con segno) centrata in $x = 0$. ■

Nota 254 *Il TFCI garantisce, tra le altre cose, che ogni funzione continua f su di un intervallo $[a, b]$ ammette una primitiva, descritta geometricamente dal valore dell'area (con segno) del grafico di f. Per le più semplici funzioni che abbiamo incontrato, la cosa può sembrare "naturale". Lo è meno per funzioni meno facili da descrivere geometricamente, come ad esempio la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & se\ x \neq 0 \\ 0, & se\ x = 0 \end{cases} .$$

Verificare questa affermazione

Questa funzione è continua, per esempio, nell'intervallo $[-1/2, 1/2]$ ▶ ed il suo grafico è dato da

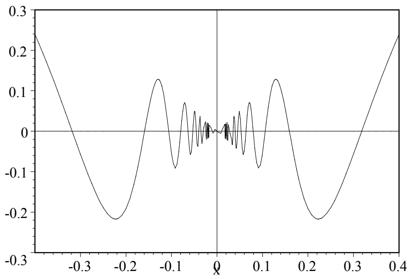


Grafico di $f(x)$

Per quanto brutto e di difficile interpretazione, il TFCI ci dice che f ammette primitiva. Quello che il teorema non dice è se e come è possibile trovarne una in forma simbolica.

Il TFCI merita il nome che gli è stato dato. Esso infatti è fondamentale da un punto di vista *teorico*, perché connette tra loro due concetti fondamentali dell'Analisi, la derivata e l'integrale. In qualche modo, il teorema ci dice, esse sono operazioni "inverse" l'una dell'altra.

Dal punto di vista *pratico* è altrettanto importante. Esso infatti ci da un metodo pratico per il calcolo dell'integrale. Vogliamo ricordarlo qui di nuovo, sotto forma di teorema.

Teorema 255 *Sia f una funzione continua nell'intervallo $[a,b]$, e sia G una sua qualsiasi primitiva; una funzione cioè, tale che $G'(x)=f(x)$. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\ dx = G(b) - G(\alpha)$$

Esempio 256 *Calcolare $\int_0^1 x^2 dx$ e $\int_0^1 x^{10} dx$. Interpretare ogni integrale come area.*

Soluzione. Il teorema (255) ci dice che è sufficiente trovare una qualsiasi primitiva delle funzioni x^2 e x^{10}, valutarla negli estremi e sottrarre, per avere il risultato voluto. Sapendo allora che, $x^3/3$ e $x^{11}/11$ sono rispettivamente, due primitive delle funzioni date, si ha

$$\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,; \qquad \int_0^1 x^{10} dx = \left.\frac{x^{11}}{11}\right]_0^1 = \frac{1}{11}\,.$$

Ogni integrale misura l'area della superficie piana racchiusa dal grafico della funzione nell'intervallo $[0,1]$.

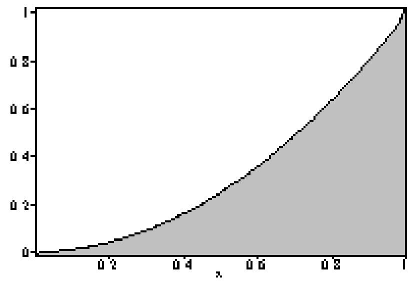


Grafico di $f(x)=x^2$, $x \in [0,1]$

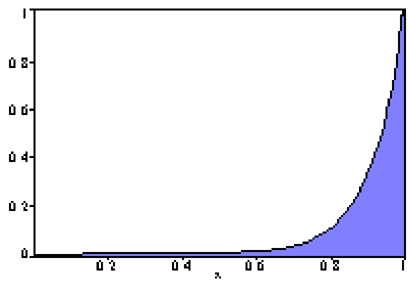


Grafico di $f(x)=x^{10}$

Esempio 257 *Calcolare l'area delle regione piana limitata dal grafico di $f(x) = 1/x$ con $x \in [1,b]$, e l'asse delle x. Per quale valore di b, l'area vale 1?*

Soluzione. Come sappiamo il valore dell'area richiesta è dato dall'integrale

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx\,.$$

Sappiamo che $\ln x$ è una primitiva di $1/x$, quindi il TFCI ci dice che

$$\int_1^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln 1 = \ln b\,.$$

Se $b=e$, allora l'area vale $\ln e = 1$. ■

Esempio 258 *La domanda di energia elettrica è, più o meno, predicibile nell'arco della giornata. basandosi sull'esperienza, gli ingegneri hanno valutato che* *in un piccolo quartiere residenziale, il consumo di energia elettrica è esprimibile con una formula del tipo*

$$C(t) = 4 + \sin(0.263\,t + 4.7) + \cos(0.526\,t + 9.4)$$

dove il consumo è espresso in megawatt ed il tempo t è espresso in ore, a partire dalla mezzanotte. Quanto è il fabbisogno totale di energia nel quartiere preso in considerazione?

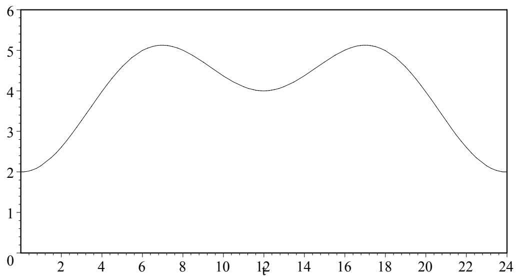


Grafico dei Megawatt consumati

Soluzione. Sia $E(t)$ rappresenta la quantità totale di energia consumata fino all'istante t a partire da mezzanotte. Allora si ha che $E'(t) = C(t)$. Ne segue che il consumo totale nelle ventiquattro ore è dato da:

$$\int_0^{24} C(t)\,dt = E(24) - E(0) = E(24) = \text{ Consumo totale giornaliero.}$$

Il TFCI, insieme alle conoscenze che abbiamo sul calcolo delle primitive, ci dicono che la funzione

$$4t - \frac{\cos(0.263\,t + 4.7)}{0.263} + \frac{\sin(0.526\,t + 9.4)}{0.526}$$

è una primitiva di C. Si ha perciò che

$$\begin{aligned} E(24) &= \int_0^{24} C(t)\,dt = 4t - \frac{\cos(0.263\,t + 4.7)}{0.263} + \frac{\sin(0.526\,t + 9.4)}{0.526}\Bigg]_0^{24} \\ &\approx 95.781 \text{ Megawatt} \cdot \text{ore} \end{aligned}$$

■

Quando Non Si Può Usare il TFCI

Il TFCI è certamente utile e, per chi apprezza la concisione e la forza della sua formulazione, anche bello, ma non risolve tutti i nostri problemi.

Per risolvere l'integrale con il metodo delle primitive, bisogna conoscere prima una primitiva della funzione data.. Purtroppo, in moltissimi casi, anche per funzioni continue, la cui formulazione è particolarmente semplice, trovare una primitiva può essere molto complicato, se non impossibile. Nessuna delle seguenti funzioni, per esempio, ha una primitiva elementare:

$$\sin x^2\,; \qquad \frac{x}{\ln x}\,; \qquad 3+\sin x+0.3\arcsin(\sin 7x)$$

Tuttavia, ognuna di loro è integrabile su ogni intevallo limitato. Il seguente, è il grafico della funzione $3+\sin x+0.3\arcsin(\sin 7x)$ nell'intervallo $[0,10]$

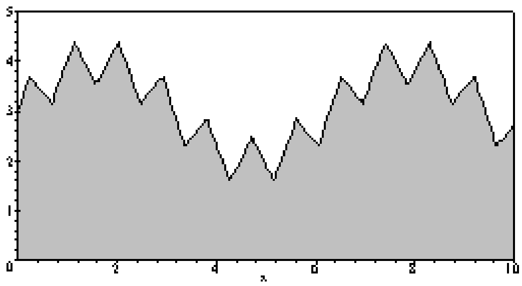


Grafico di $\sin x+0.3\arcsin(\sin 7x)$

e, la parte colorata rappresenta l'area racchiusa tra il grafico e l'asse x nell'intervallo $[0,10]$, quindi

$$\int_0^{10}(\sin x+0.3\arcsin(\sin 7x))\;dx\,.$$

Con o senza una formula per la primitiva, l'integrale esiste. Si pone quindi il problema di studiare tecniche (che non coinvolgono le primitive) per la stima dell'integrale di una funzione come quella precedente.

Una Notazione Utile per le Primitive ed un Attenzione

E' utile indicare una primitiva di una funzione come **integrale indefinito**, cioè

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C\,, \quad \text{dove } F'(x)=f(x)\ .$$

Per esempio,

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C\,; \qquad \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+C\,.$$

La notazione riflette la connessione fondamentale tra funzioni e primitive. Bisogna fare, tuttavia attenzione ai seguenti fatti:

- Il simbolo $\int f(x)\,dx$ indica una famiglia di funzioni, una per ogni valore della costante C.
- L'**integrale definito** $\int_a^b f(x)\,dx$ e l'**integrale indefinito** $\int f(x)\,dx$ hanno significati profondamente diversi. *Il primo è un numero,* mentre il secondo rappresenta *una famiglia di funzioni.*

7.2.1 Esercizi

1. Trovare l'area sotto i grafici delle curve date, negli intervalli assegnati.

   (a) $y = x^3\,,\ 1 \le x \le 5\,;$

   (b) $y = x\,,\ 0 \le x \le 2\,;$

   (c) $y = \cos x\,,\ 0 \le x \le \pi/2\,;$

   (d) $y = 1/x\,,\ 1 \le x \le 2\,;$

   (e) $y = e^x\,,\ 0 \le x \le 1\,;$

   (f) $y = x^4\,,\ -1 \le x \le 1\,.$

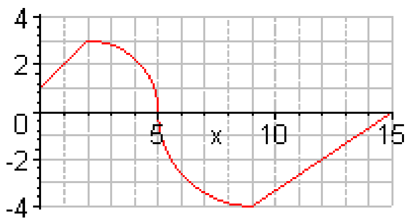
2. Per ognuna delle funzioni sotto, calcolare:
   $\int_0^2 f(x)\,dx\,,\ \int_1^4 f(x)\,dx\,,\ \int_{-5}^{-1} f(x)\,dx\,,\ \int_{-2}^{3} f(x)\,dx\,.$

   (a) $f(x) = 3x\,;$

   (b) $f(x) = 2x + 5\,;$

   (c) $f(x) = 5 - 2x\,.$

3. Il grafico della funzione f,descritto sotto,consiste di due segmenti e due archi di circonferenza.



   Calcolare ognuno dei seguenti integrali.

   (a) $\int_0^2 f(x)\;dx\,;$

   (b) $\int_2^5 f(x)\;dx\,;$

   (c) $\int_5^9 f(x)\;dx\,;$

   (d) $\int_9^{15} f(x)\;dx\,;$

   (e) $\int_0^{15} f(x)\;dx\,;$

   (f) $\int_0^{15} |f(x)|\;dx\,;$

   (g) $\int_{15}^{9} f(x)\;dx\,;$

(h) $\int_{12}^{15} f(x)\ dx$;

(i) $\int_0^9 f(x)\ dx$;

(j) $\int_2^9 f(x)\ dx$.

4. Supponiamo che $\int_{-2}^{5} f(x)\ dx = 18$, $\int_{-2}^{5} g(x)\ dx = 5$, e $\int_{-2}^{5} f(x)\ dx = -11$. Calcolare i seguenti integrali

 (a) $\int_{-2}^{5} (f(x) + g(x))\ dx$;

 (b) $\int_{-2}^{5} (f(x) + h(x))\ dx$;

 (c) $\int_{-2}^{5} (f(x) + g(x) - h(x))\ dx$;

 (d) $\int_{-2}^{5} (2f(x) + 3g(x))\ dx$;

 (e) $\int_{-2}^{5} (1 + g(x))\ dx$;

 (f) $\int_{5}^{-2} f(x)\ dx$;

 (g) $\int_0^7 g(x-2)\ dx$.

5. Quattro studenti discutono sul valore dell'integrale $\int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx$. Giovanni afferma che vale π, per Maria vale $35\pi/256$, Paolo insiste per $2\pi/9 - 1$, ed infine Valeria dice$\pi/4$. Usare il grafico sotto per determinare chi ha ragione$\cos^8 x$

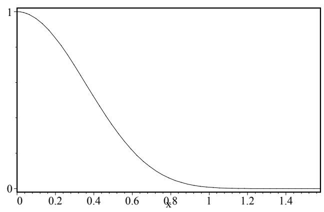


Grafico di $\cos^8 x$

6. Sia f la funzione descritta nell'Esercizio 3.

 (a) Mostrare che $\int_2^4 f(x)\ dx > 5$;

 (b) Mostrare che $\int_6^9 f(x)\ dx < -9$;

 (c) E' vero che $\int_0^6 f(x)\ dx < 11$?

 (d) L'integrale $\int_2^7 f(x)\ dx$ è positivo o negativo?

7. Calcolare:

(a) $\int_{-3}^{3} (x+2)\ dx$;

(b) $\int_{-3}^{3} |x+2|\ dx$;

(c) $\int_{-3}^{3} (|x|+2)\ dx$;

(d) $\int_{-3}^{3} (2-|x|)\ dx$.

8. Calcolare $\int_0^2 f(x)\ dx$ dove f è la funzione definita da
$f(x) = . \begin{cases} 1+x\,, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 2-x\,, & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$.

9. Calcolare $\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\, dx$ [**Sugg.:** disegnare il grafico dell'integrando].

10. Calcolare $\int_1^3 \left(6 - \sqrt{4-(x-3)^2}\right)\ dx$.

11. Calcolare $\int_0^3 f(x)\ dx$ dove f è data da
$f(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{1-x^2}\,, & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 1+\sqrt{4-(x-3)^2}\,, & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

12. Spiegare perché $\int_1^2 x^3\, dx = \int_3^4 (x-2)^3\, dx = \int_{-3}^{-2} (x+4)^3\, dx$.

13. Supponiamo che (i) $\int_0^2 f(x)\ dx = 2$, (ii) $\int_1^2 f(x)\ dx = -1$ e (iii) $\int_2^4 f(x)\ dx = 7$.

    (a) Calcolare $\int_1^4 f(x)\, dx$;

    (b) Calcolare $\int_0^4 3f(x)\, dx$;

    (c) Calcolare $\int_0^1 f(x)\, dx$;

    (d) Calcolare $\int_0^1 f(x+1)\, dx$;

    (e) Calcolare $\int_0^1 (f(x)+1)\ dx$;

    (f) Calcolare $\int_2^4 f(x-2)\ dx$;

    (g) Calcolare $\int_2^4 (f(x)-2)\ dx$.

    (h) Spiegare perché f deve anche assumere valori negativi nell'intervallo $[1,2]$.

    (i) Spiegare perché $f(x) \ge 3$ per qualche x nell'intervallo $[2,4]$.

    (j) Tracciare il grafico di una funzione con le proprietà (i)÷(iii).

14. Supponiamo che $\int_0^3 f(x)\ dx = -1$.

    (a) Supponiamo che f sia pari. Spiegare perché $\int_{-3}^3 f(x)\ dx = 2$.

    (b) Supponiamo che f sia dispari. Quanto vale $\int_{-3}^3 f(x)\ dx$?

15. Ricordando che $\int_0^\pi \sin x\, dx = 2$, calcolare i seguenti integrali ricorrendo a argomenti geometrici.

    (a) $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$;

    (b) $\int_{\pi/2}^{3/2\cdot\pi} \sin x\, dx$;

    (c) $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$;

    (d) $\int_0^{2\pi} |\sin x|\ dx$;

    (e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, dx$;

    (f) $\int_0^{\pi} (1+\sin x)\ dx$;

    (g) $\int_0^{\pi/2} (x+\cos x)\ dx$.

    (h) $\int_0^{100\pi} |\sin x|\ dx$;

    (i) $\int_0^{100\pi} \sin x\, dx$;

    (j) $\int_0^{100\pi} \cos x\, dx$.

16. Spiegare perché $\int_1^3 \dfrac{1-x}{x^2}dx < \int_1^2 \dfrac{1-x}{x^2}dx$.

17. Sia $f(x))\frac{1}{2}x + \cos x$. Spiegare come mai $1.3 \le \int_0^3 f(x)\, dx \le 3.5$.

18. Mostrare che $4.5 \le \int_1^3 e^x dx \le 15$.

19. Mostrare che $0 \le \int_0^\pi x \sin x\, dx \le \pi^2/2$.

20. Mostrare che $\pi/6 \le \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x\, dx \le \pi/3$;

21. Mostrare che $0.4 \le \int_0^1 \sin(e^x)\ dx \le 1$.

22. Mostrare che $\frac{\pi}{2} \le \int_0^\pi \cos(\sin x)\ dx \le \pi$

23. Sia f definita, continua e dispari su $\mathbb{R}$. Spiegare perché il valor medio di f su ogni intervallo del tipo $[-a,a]$ è zero.

24. Sia f definita, continua e pari su $\mathbb{R}$. Spiegare perché il valor medio di f su ogni intervallo del tipo $[-a,a]$ è uguale al valor medio sull'intervallo $[0,a]$.

25. Sia f continua. Se il suo valor medio nell'intervallo $[0,1]$ è 2 ed il valor medio nell'intervallo $[1,3]$ vale 4, quanto vale il valor medio di f nell'intervallo $[0,3]$?

26. Sia f continua. Se il suo valor medio nell'intervallo $[-3,1]$ è 2 ed il valor medio nell'intervallo $[-3,7]$ vale 5, quanto vale il valor medio di f nell'intervallo $[1,7]$?

27. Mostrare che l'espressione $\int_a^b (f(x)-c)^2\,dx$ assume il suo valore minimo quando c è il valor medio di f nell'intervallo $[a,b]$.

28. Sia f continua su $[0,1]$. Spiegare perché $\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 f(1-x)\ dx$

29. Supponiamo f continua su $[a,b]$. Mostrare che $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$.

30. Supponiamo f e g continue su $[a,b]$, tali che $\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b g(x)\ dx$.

   (a) Deve necessariamente essere $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a,b]$? Se si, spiegare il perché, se no dare un controesempio.
   (b) Deve esistere un numero $c \in [a,b]$ per il quale $f(c) \leq g(c)$. Se si, spiegare il perché, se no dare un controesempio.

31. Sia $f(x) = x$. Mostrare che $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = x^2$, anche se $x < 0$.

32. Siano $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int_1^x f(t)\,dt$, $H(x) = \int_{-2}^x f(t)\,dt$.

   (a) Supponiamo che $f(x) = 1$. Trovare le espressioni simboliche per F, G e H. Dire se esse sono primitive di f.
   (b) Supponiamo che $f(x) = 2x$. Trovare le espressioni simboliche per F, G e H. Dire se esse sono primitive di f.
   (c) Supponiamo che $f(x) = 2x+1$. Trovare le espressioni simboliche per F, G e H. Dire se esse sono primitive di f.

33. Sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ e $G(x) = \int_b^x f(t)\,dt$. Mostrare che F e G differiscono per una costante.

34. Supponiamo che F sia una primitiva di una funzione differenziabile f.

   (a) Se F è crescente in $[a,b]$, cosa si può dire su f?
   (b) Se f è negativa su $[a,b]$, cosa si può dire su F ?
   (c) Se $f' > 0$ su $[a,b]$, cosa si può dire su F ?
   (d) Se F è concava su $[a,b]$, cosa si può dire su f ?

35. Sia $f(x) = \sin x$ e $F(x) = \int_0^x \sin t\,dt$.

   (a) Sapendo che $F(\pi/2) = 1$, calcolare $F(\pi)$, $F(0)$, $F(3\pi/2)$, $F(2\pi)$, $F(-\pi/2)$, $F(-3\pi/2)$, $F(-\pi)$, $F(-2\pi)$.

(b) Spiegare perché $F(x)$ è una funzione periodica.

36. Sia f continua, tale che $\int_0^x f(t)\,dt = \sin x^2$.

    (a) Mostrare che $\int_{\sqrt{\pi/2}}^x f(t)\,dt = \sin x^2 - 1$.

    (b) Trovare un'espressione per $\int_{-\sqrt{3\pi/2}}^x f(t)\,dt$.

37. Sia $f(x) = 2 - |x|$ e $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

    (a) Trovare un espressione simbolica per $F(x)$.

    (b) Disegnare f ed F sullo stesso sistema d'assi.

    (c) Dire dove è crescente F. Cosa si può dire di f nello stesso intervallo?

    (d) Dire dove è decrescente F. Cosa si può dire di f nello stesso intervallo?

    (e) Dire dove F ha estremi locali. Cosa si può dire di f negli stessi punti?

    (f) Dire dove è convessa F. Cosa si può dire di f negli stessi intervalli?

    (g) Dire dove è concava F. Cosa si può dire di f negli stessi intervalli?

    (h) Dire se F ha punti di flesso. Se si quali sono. Cosa si può dire di f negli stessi punti?

    (i) Come cambierebbero le risposte alle parti (c)-(h) se F fosse definita come $\int_3^x f(t)\,dt$?

38. Sia f continua su $[a,b]$, $1c$ una costante, e $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$.

    (a) Dimostrare che se f è positiva su $[a,b]$, allora F è crescente su $[a,b]$.

    (b) Usare (a) per mostrare che se f è negativa su $[a,b]$, allora F è decrescente su $[a,b]$.

    (c) Usare (a) e (b) per dimostrare che $F(x)$ ha un estremo locale nei punti in cui f cambia segno.

39. Supponiamo che $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$. Valutare ognuna delle seguenti espressioni in termini di G.

    (a) $\int_1^3 g(t)\,dt$;

    (b) $\int_{-2}^2 g(t)\,dt$;

    (c) $\int_0^1 g(t)\,dt$.

    Sia $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, essendo c una costante ed f una funzione continua.

    (a) Provare che se f è crescente in $[a,b]$, allora F è convessa in $[a,b]$. [**Sugg.:** una funzione g è convessa in un intervallo, se e solo se $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} < \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$per ogni a, b ed x nell'intervallo, tali che $a < x < b$.]

(b) Usare (a) per mostrare che se è decrescente su $[a, b]$, allora F è concava in $[a, b]$.

(c) Supponiamo che f abbia un massimo locale nel punto a. Spiegare perché F ha un flesso in a.

40. Sia $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

(a) Usare la geometria per mostrare che $\int_0^x \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$ se $0 \le x \le 1$. [**Sugg.:** L'area del settore circolare si raggio r e angolo θ è data da $r^2 \theta / 2$]

(b) Mostrare che $\int_0^x \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x$ se $-1 \le x \le 0$.

41. Sia $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, dove $f(t)$ è la funzione disegnata sotto:

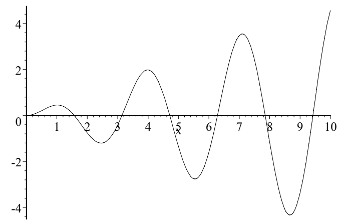


Grafico di f

(a) Dire se F ammette estremi locali nell'intervallo $[0, 10.]$. Se si, dire dove sono e cosa sono.

(b) Per quale valore di x,F ammette minimo assoluto nell'intervallo $[0, 10]$?

(c) Su quali sottointervalli di $[0, 10]$ la funzione F è convessa? Giustificare la risposta.

42. Mostrare che se $f(a) \neq 0$ allora $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt \neq \int_a^x \left[\frac{d}{dt} f(t)\right] dt$.

43. Sia $g(u) = \int_1^u f(x)\, dx$, dove f è al funzione disegnata sotto

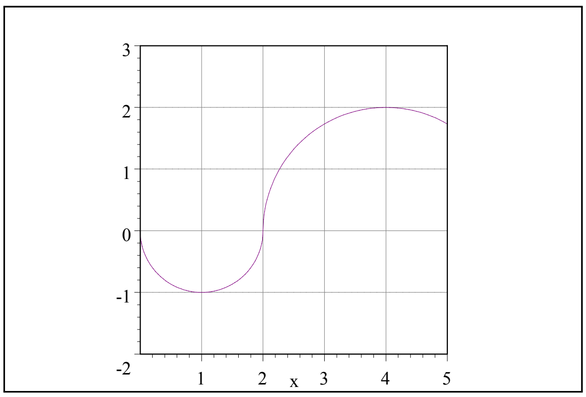


Grafico di f

(a) Valutare $g'(4)$.

(b) Dove, nell'intervallo $[0,5]$, la funzione è convessa?

(c) Quante radici ha g nell'intervallo $[0,5]$?

(d) Ordinare, in ordine crescente i numeri $g(0)$, $g(1)$, $g(2)$ e $g(4)$.

(e) Dire se il valor medio di g è maggiore o minore di 1. Giustificare la risposta.

44. Trovare l'equazione della retta tangente alla funzione $F(x) = \int_1^x \sqrt[3]{t^2+7}dt$, nel punto $x = 1$.

45. Supponiamo che $f'(x) = \sqrt[3]{1+x^2}$, ed inoltre che $f)1 = 0$.

    (a) Spiegare perché $f(x) = \int_1^x \sqrt[3]{1+t^2}dt$.

    (b) Esprimere $\int_0^3 \sqrt[3]{1+x^2}dx$ in termini di $f(x)$.

46. Sia $f(x) = \int_1^x \sqrt[3]{1+t^2}$. Calcolare $\frac{d}{dx}f\left(x^2\right)$.

47. Sia f una funzione con le seguenti proprietà:

    (a) i. $f'(x) = ax^2 + b$;
    ii. $f''(1) = 18$;
    iii. $f'(1) = 6$;
    iv. $\int_1^2 f(x)\,dx = 18$.
    Trovare un'espressione algebrica per f.

48. Sia $f(x) = \begin{cases} -2\,, & \text{se } x < 0 \\ 1\,, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ e sia $F(x) = \int_{-2}^x f(t)\,dt$.

    (a) Calcolare $\int_{-1}^1 f(t)\,dt$.

    (b) Disegnare sullo stesso sistema d'assi i grafici di f ed F per $x \in [-2,2]$.

    (c) Dire se esiste $F'(1)$. In tal caso, calcolarlo usando la definizione di derivata.. Se no, spiegare perché.

    (d) Dire se esiste $F'(-1)$. In tal caso, calcolarlo usando la definizione di derivata.. Se no, spiegare perché.

    (e) Spiegare perché non esiste $F'(0)$. Perché questo fatto non contraddice il TFCI?

49. La funzione $\ln x$ è a volte definita come:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt\,, \quad x > 0\,.$$

Assumiamo $a > 0$. Determinare l'identità $\ln ax = \ln a + \ln x$ sviluppando e giustificando i seguenti passaggi:

(a) i. Mostrare che $\frac{d}{dx}\int_1^{ax}\frac{1}{t}dt = \dfrac{1}{x}$ [**Sugg.:** usare la regola di derivazione delle funzioni composte] ;

ii. Spiegare perché il risultato di (i) implica che $\ln ax = \ln x + C$;

iii. Scegliendo un valore appropriato di mostrare che la costante C di (ii) è $\ln a$.

7.3 Somme Approssimanti: L'Integrale come Limite

L'integrale $\int_a^b f$, così come l'abbiamo definito fino ad ora, rappresenta l'area (con segno) della regione limitata dal grafico della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. Abbiamo inoltre visto, come il TFCI si possa rapidamente calcolare un integrale, una volta che sia nota una primitiva della funzione integranda.

nonostante la stretta relazione, differenziazione ed integrazione non sono la stessa cosa. per molti integrali, anche con struttura semplice, come $\int_0^1 \sin x^2 dx$, la ricerca di una primitiva è inutile, perché non è possibile trovare nessuna formula per una primitiva, che sia utilizzabile.

In questo paragrafo, affrontiamo un diverso approccio alla definizione di integrale, definendolo, questa volta, come il limite di "somme approssimanti".

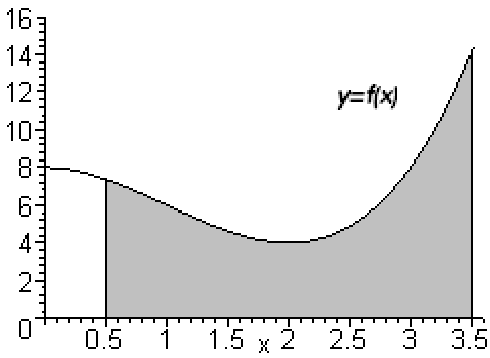
tale definizione ci offre una nuova ed utile prospettiva sull'integrale ed il suo significato.. Ugualmente importante è il fatto che esso ci offre un metodo per la stima numerica degli integrali definiti.

la definizione formale di integrale come limite, richiede l'uso di una terminologia e di una notazione complessa. L'idea che sta alla base del processo è invece naturale e semplice da comprendere. Arriveremo, quindi alla definizione attraverso esempi esplicativi, introducendo, lungo il percorso, idee e terminologia

7.3.1 Stima degli Integrali con le Somme Approssimanti

Iniziamo con un esempio.

Esempio 259 *Consideriamo la funzione* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$. *L'area ombreggiata rappresenta l'integrale della funzione nell'intervallo* $[0.5, 3.5]$. *Usare il TFCI per calcolarlo esattamente. Usare poi delle somme approssimanti per stimarlo.*

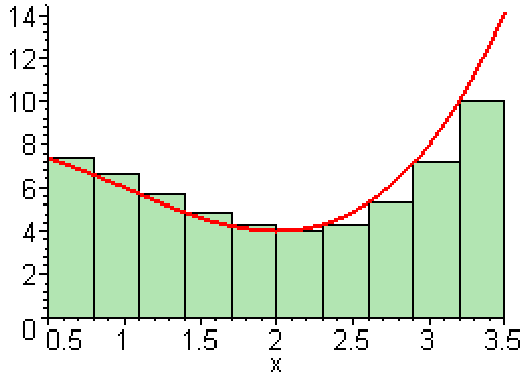


Quanto vale l'area ?

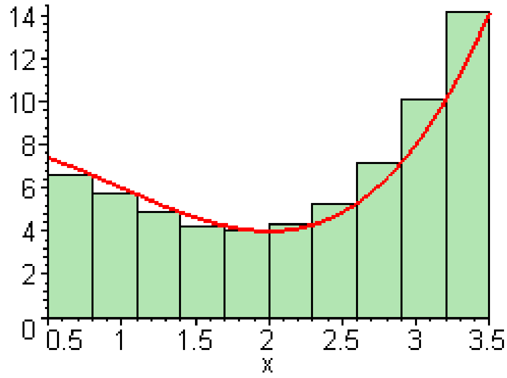
Soluzione. Usando il TFCI, trovare la risposta è semplice, usando le primitive

$$\int_{0.5}^{3.5} \left(x^3 - 3x^2 + 8\right) dx = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + 8x\right)\Bigg]_{0.5}^{3.5} = \frac{75}{4} = 18.75\,.$$

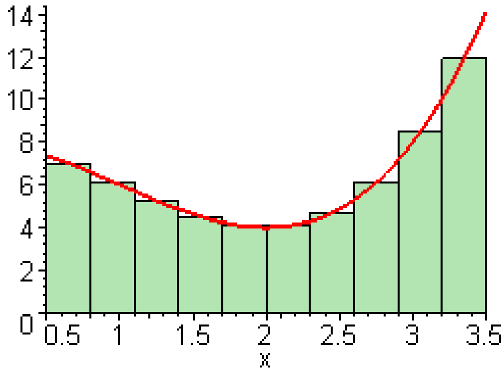
Come possiamo stimare l'area ? Le seguenti figure ci suggeriscono quattro possibili strategie. Le prime tre sono ottenute suddividendo l'intervallo in 10 parti uguali.



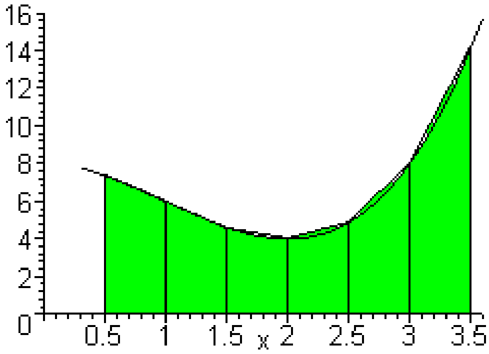
Somma Sinistra



Somma destra



Somma del punto centrale



Somma dei Trapezi

In ognuno di questi quattro casi, abbiamo *approssimato* il valore dell'area con la somma si aree più semplici, rettangoli o trapezi. (nel caso dei trapezi, abbiamo scelto 6 divisioni, invece di 10 per rendere più chiara la differenza tra l'integrale e la stima).

Nei primi tre casi abbiamo scelto come altezza dei rettangoli approssimanti, rispettivamente: il valore di f nell'estremo sinistro di ogni sottointervallo della suddivisione, il valore di f nell'estremo destro, ed il valore di f nel punto di centro.

Nel caso dei trapezi, i trapezi costruiti sono quelli che hanno come altezze i valori di f negli estremi dei sottointervalli.

Come si Calcola l'Approssimazione ?

Vediamo più in dettaglio le singole approssimazioni.

Consideriamo dapprima S_{10}, la **somma approssimante sinistra** con 10 suddivisioni.

L'area colorata consiste di 10 rettangoli ognuno dei quali ha base 0.3, cioè $(3.5 - 0.5)/10$. L'altezza dei rettangoli varia: l'altezza di ognuno è il valore della funzione f nell'*estremo sinistro* della base (da questo, somma sinistra)

Il secondo rettangolo, per esempio, ha l'intervallo $[0.8, 1.1]$ come base; la sua altezza è $f(0.8)$, cioè il valore della funzione nel suo estremo sinistro. Poiché

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$, si ha che $f(1.1) = 6.592$. Quindi, il secondo rettangolo ha area

$$Area = 0.3 \cdot 6.592 = 1.9776$$

L'area totale dei rettangoli è allora

$$\begin{aligned} S_{10} &= f(0.5) \cdot 0.3 + f(0.8) \cdot 0.3 + f(1.1) \cdot 0.3 + \cdots + f(2.9) \cdot 0.3 + f(3.2) \cdot 0.3 \\ &= 7.375 \cdot 0.3 + 6592 \cdot 0.3 + 5.701 \cdot 0.3 + \cdots + 7.159 \cdot 0.3 + 10.048 \cdot 0.3 \\ &= 17.8725\,. \end{aligned}$$

La **somma approssimante destra con** 10 suddivisioni, D_{10}, differisce dalla precedente, perché l'altezza di ogni rettangolo è il valore di f nell'*estremo destro* dell'intervallo di base. Quindi l'area totale dei 10 rettangoli così costruiti è data da:

$$\begin{aligned} R_{10} &= f(0.8) \cdot 0.3 + f(1.1) \cdot 0.3 + f(1.4) \cdot 0.3 + \cdots + f(3.2) \cdot 0.3 + f(3.5) \cdot 0.3 \\ &= 6592 \cdot 0.3 + 5.701 \cdot 0.3 + 10.048 \cdot 0.3 \cdots + 10.048 \cdot 0.3 + 14.125 \cdot 0.3 \\ &= 19.8975\,. \end{aligned}$$

Nel caso di M_{10}, **la somma approssimante dei punti intermedi** con 10 suddivisioni, l'altezza dei rettangoli è valutata nel *punto di mezzo* di ogni singolo sottointervallo. Quindi:

$$\begin{aligned} M_{10} &= f(0.65) \cdot 0.3 + f(0.95) \cdot 0.3 + f(1.25) \cdot 0.3 + \cdots + f(3.35) \cdot 0.3 \\ &= 7.007 \cdot 0.3 + 6.150 \cdot 0.3 + 5.226 \cdot 0.3 \cdots + 8.465 \cdot 0.3 + 11.928 \cdot 0.3 \\ &= 18.6825\,. \end{aligned}$$

L'uso dei trapezi, dal punto di vista geometrico sembra una buona idea. Inoltre il loro calcolo è semplice quanto quello del calcolo delle somme dei rettangoli.

Una idea semplice, semplifica il lavoro: *l'area del trapezio è la media delle aree dei due rettangoli determinati dal lato più corto e da quello più lungo.* Questa semplice osservazione ci basta per affermare che:

> *La divisione trapezoidale con n suddivisioni, T_n è la media delle corrispondenti approssimazioni destre e sinistre.*

Nel caso del trapezoide a sei suddivisioni si ha:

$$\begin{aligned} T_6 &= \frac{1}{2}(S_6 + D_6) \\ &= \frac{1}{2}(17.4375 + 20.8125) = 19.125\,. \end{aligned}$$

La Notazione di Sommatoria; Partizioni

Le somme in cui compaiono molti termini, sono lunghe e noiose da scrivere. Per questo motivo introduciamo il simbolo di **sommatoria** $\sum$ come elemento di efficiente semplificazione che ci permette, inoltre, di vedere in modo più chiaro similarità e differenze nei sommandi.

Iniziamo, come al solito, con alcuni esempi.

Esempio 260 *Discutere e valutare le seguenti espressioni*

$$\sum_{k=1}^{5} k\,; \quad \sum_{j=1}^{5} j\,; \quad \sum_{i=1}^{10} 3i\,.$$

Soluzione. Per definizione $\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5$, o semplicemente 15. Sebbene la seconda somma sembri tipograficamente diversa, in realtà significa la stessa cosa, $\sum_{j=1}^{5} j = 1+2+3+4+5 = 15$. La conseguenza che se ne trae è che:*il nome della variabile d'indice non conta.*

la terza espressione è apparentemente più complicata, ma l'idea è la stessa

$$\sum_{i=1}^{10} 3i = 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 3 + \cdots + 3\cdot 9 + 3\cdot 10 = 165\,.$$

Da notare in una situazione come questa che, il fattore comune 3 può essere portato fuori dal segno di sommatoria e si ha $\sum_{i=1}^{10} 3i = 3\sum_{i=1}^{10} i$, (proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto). ■

Esempio 261 *Usare la notazione di sommatoria per riscrivere le somme sinistra, destra e del punto centrale (S_{10}, D_{10}, M_{10}) già calcolate.*

Soluzione. Tutte e tre le approssimazioni si basano sulla suddivisione dell'intervallo $[0.5, 3.5]$ in dieci sottointervalli uguali, ognuno di ampiezza $\Delta x = 0.3$. Questi sono i punti finali di ogni sottointervallo, espressi in ordine crescente

$$0.5 < 0.8 < 1.1 < 1.4 < 1.72.0 < 2.3 < 2.6 < 2.9 < 3.2 < 3.5\,.$$

Questo insieme ordinato di 11 punti è chiamato **una partizione** dell'intervallo $[0.5, 3.5]$. Per convenienza, indichiamo questi punti, nello stesso ordine come: $x_0 = 0.5,\ x_1 = 0.8, \ldots, x_{10} = 3.5$.

Possiamo adesso riscrivere le tre somme precedenti nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
S_{10} &= \sum_{i=0}^{9} f(x_i)\,\Delta x = f(x_0)\,\Delta x + f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_9)\,\Delta x \\
&= f(0.5)\cdot 0.3 + f(0.8)\cdot 0.3 + f(1.1)\cdot 0.3 + \cdots + f(3.2)\cdot 0.3 \\
D_{10} &= \sum_{i=1}^{10} f(x_i)\,\Delta x = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + f(x_3)\,\Delta x + \cdots + f(x_{10})\,\Delta x \\
&= f(0.8)\cdot 0.3 + f(1.1)\cdot 0.3 + f(1.4)\cdot 0.3 + \cdots + f(3.5)\cdot 0.3 \\
M_{10} &= \sum_{i=0}^{9} f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\Delta x \\
&= f(0.65)\cdot 0.3 + f(0.95)\cdot 0.3 + \cdots + f(3.05)\cdot 0.3 + f(3.35)\cdot 0.3
\end{aligned}$$

L'uso del simbolo di sommatoria $\sum$ rende la formulazione delle varie somme semplice e compatta.

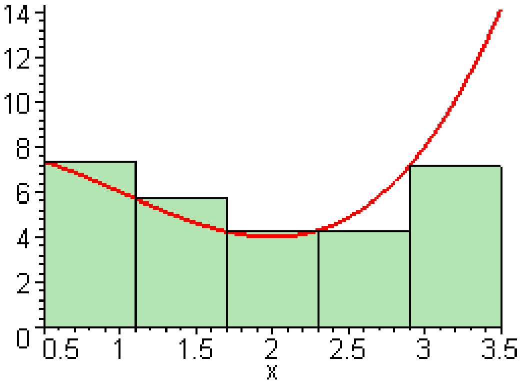
Se preferiamo usare i numeri, piuttosto dei simboli, basta notare che $x_i = 0.5 + 0.3\,i$ e riscrivere le somme. Ecco come appaiono due di esse:

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= \sum_{i=0}^{9} f(x_i)\,\Delta x = 0.3 \cdot \sum_{i=0}^{9} f(0.5 + 0.3\,i) \;; \\
M_{10} &= \sum_{i=0}^{9} f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}\right) \Delta x = 0.3 \cdot \sum_{i=0}^{9} f(0.65 + 0.3\,i)
\end{aligned}
$$

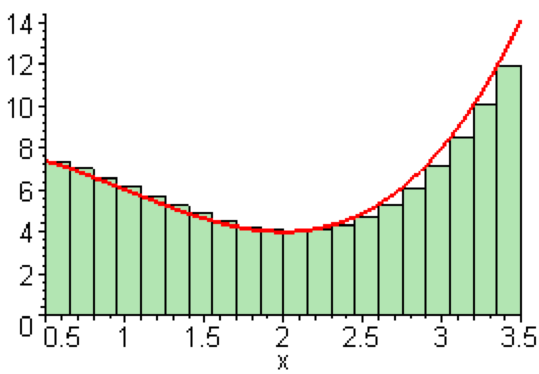
■

7.3.2 Somme di Riemann e Definizione dell'Integrale come Limite

Appare ragionevole che, qualunque sia il tipo di somma approssimante scelta, la sua approssimazione del valore dell'integrale migliora al crescere delle suddivisioni. Il seguente disegno, che riporta ancora $\int_{0.5}^{3.5} f(x)\,dx$ ci mostra (non dimostra) la ragionevolezza dell'affermazione



Somma sinistra, 4 suddivisioni

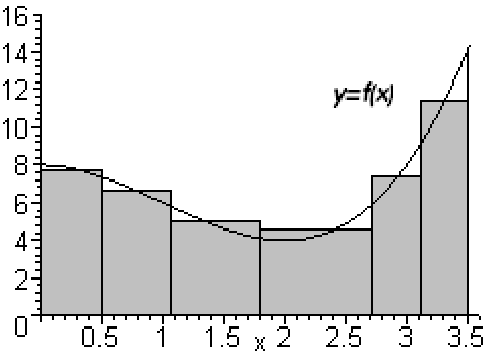


Somma sinistra, 20 suddivisioni

Nessuna delle due approssimazioni sinistre è perfetta, ma indubbiamente, quella con 20 suddivisioni sembra commettere un errore minore. I valori delle somme nei due casi (ovviamente calcolati al computer sono rispettivamente: 17, 4365 e 18.29846.

Se provassimo a calcolare S_{250} otterremo come risultato il numero 18.70987565; come si vede all'aumentare della partizione il valore approssimato si avvicina sempre più al valore vero di 18.75.

Le approssimazioni sinistre, destre e centrali, sono delle forme speciali delle **somme di Riemann.** L'idea di Riemann di approssimazione è quella di approssimare l'integrale con rettangoli che non hanno necessariamente la stessa base, così come la loro altezza può essere scelta casualmente come uno qualsiasi dei valori assunti dalla funzione in ognuno dei sottointervalli della partizione.



Somma di Riemann con 6 suddivisioni

In questo corso non richiederemo la conoscenza generale della teoria di integrazione di Riemann. Riportiamo comunque la definizione generale di somma di Riemann, a futura memoria.

Definizione 262 *Sia f una funzione definita nell'intervallo $[a, b]$. Sia*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_n = b$$

una partizione qualsiasi dell'intervallo $[a, b]$.
Indichiamo con Δx_i la lunghezza dell' i-esimo sottointervallo, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. In ogni sottointervallo $[x_{i-1}, x_i]$ scegliamo un punto c_i, ($c_i \in [x_{i-1}, x_i]$). La somma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i = f(x_1)\, \Delta x_1 + f(x_2)\, \Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\, \Delta x_n$$

*è una **somma di Riemann** con n suddivisioni dell'intervallo $[a, b]$.*

Le partizioni sinistre destre e centrali sono casi particolari della definizione data. Ognuna di esse è costruita usando una **partizione regolare** dell'intervallo $[a, b]$, (cioè con sottointervalli di uguale lunghezza) ed uno schema semplice e consistente per la scelta dei punti c_i. Una somma *trapezoidale*, d'altra parte non è una somma di Riemann perché le figure approssimanti non sono rettangoli. Tuttavia, la approssimazioni trapeziodali, come abbiamo visto si ottengono come media tra le approssimazioni sinistre e quelle destre.

L'Integrale come Limite

L'intuizione grafica suggerisce che le varie somme S_n, D_n, M_n e T_n dovrebbero convergere al valore dell'$\int_{0.5}^{3.5} f(x)\, dx$ al crescere di n.

La definizione di integrale come limite rende precise queste idee.

Definizione 263 *Sia f una funzione definita nell'intervallo $I = [a, b]$. L'**integrale di** f **su** I, indicato con$\int_a^b f(x)\,dx$, è il numero a cui tendono le somme di Riemann S_n quando n tende all'infinito e le lunghezze di tutte le suddivisioni tende a zero.*
In simboli:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

se il limite esiste.

Ecco, di seguito, alcuni commenti sulla definizione.

- **Quando una funzione è integrabile?** Una funzione per la quale il limite della definizione esiste è chiamata **integrabile** su $[a, b]$. In pratica, la proprietà di integrabilità è abbastanza comune: la maggior parte delle funzioni che riusciamo a pensare in un corso di questo tipo e che sono limitate, sono integrabili su $[a, b]$. La vera sorpresa è la difficoltà immaginarne una non integrabile.
  Per vostra conoscenza e riflessione, eccone una:

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{se } x \text{è razionale} \\ 0\,, & \text{se } x \text{è irrazionale} \end{cases}.$$

- **Funzioni Regolari** il limite della definizione, non è assolutamente facile da trattare, né tantomeno da calcolare. Capire bene cosa significa permettere partizioni arbitrarie e scelte arbitrarie dei punti su cui calcolare la funzione è complicato. Fortunatamente, la questione si semplifica enormemente quando abbiamo a che fare con funzioni continue, quelle con cui tipicamente operiamo. Per tali funzioni, qualunque partizione, anche molto regolare, tende al valore dell'integrale quando n tende all'infinito.

Nota sulla notazione dx

La definizione di limite aiuta a capire l'altrimenti misteriosa notazione dx nella notazione $\int_a^b f(x)\,dx$. Consideriamo, per esempio, il caso dell'approssimazione *destra* con suddivisioni uguali, ognuna delle quali di lunghezza $(b-a)/n = \Delta x$. Allora, per definizione

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x\,.$$

Adesso, il lato sinistro dell0uguaglianza, assomiglia molto a quello destro, il dx sulla sinistra corrisponde, in modo naturale, al Δx sulla destra.

Somme Approssimanti e Computer

Le somme approssimanti offrono una semplice, efficace ed accurata approssimazione per quasi tutti gli integrali (semplice per un computer, sia chiaro). Il calcolo di somme approssimanti fatte a mano è possibile solo per integrandi molto semplici e poche suddivisioni. La maggior parte dei programmi di matematica hanno routines che prevedono esplicitamente questo calcolo.

MAPLE, per esempio ha, nel package "student" i comandi `leftbox, rightbox` e `middlebox` per disegnare le approssimazioni e, `leftsum, rightsum` e `middlesum` per calcolare i valori delle approssimazioni.

7.3.3 Esercizi

1. Sia g la funzione il cui grafico è disegnato sotto. Stimare il valore di $\int_{-4}^{4} g\,(x)\,dx$, valutando le somme sinistra, destra e centrale con 4 suddivisioni.

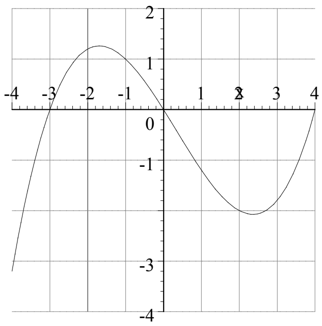


Grafico di g

2. Sia f la funzione disegnata sotto

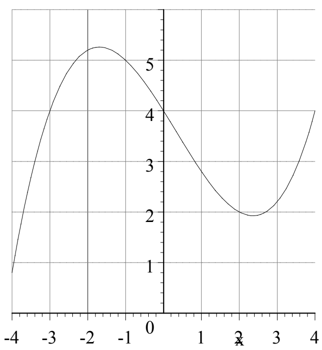


Grafico di f

   (a) Mostrare che $\int_{-4}^{4} f\,(x)\,dx < 45$

   (b) E' vero che $16 < \int_{-4}^{4} f\,(x)\,dx$? Giustificare la risposta usando un disegno

   (c) Stimare $\int_{-4}^{4} f\,(x)\,dx$ usando una somma destra con 4 sottointervalli uguali.

   (d) Stimare $\int_{-4}^{4} f\,(x)\,dx$ usando una somma sinistra con 4 sottointervalli uguali.

3. Sia $I = \int_{0}^{20} x^2 dx$. Usare la notazione di sommatoria per scrivere l'espressione di R_{10}, la somma di Riemann destra con sottointervalli uguali.

4. Al tempo t, misurata in ore, $0 \leq t \leq 24$, una fabbrica usa elettricità per $E\,(t)$ kilowatts. L'elettricità costa $c\,(t)$ Euro per kilowatt. Assumiamo che entrambe, E e c siano funzioni continue.

(a) Scrivere una somma sinistra di n termini che approssimi il costo totale di elettricità nelle 24 ore.

(b) Quale integrale definito è approssimato dalla somma trovata in (a)?

5. Sia $I = \int_0^5 \sqrt[3]{2x}\, dx$. Usare la notazione di sommatoria per scrivere le somme sinistra, destra e centrale di I per scrivere l'approssimazione con 10 sottointervalli uguali.

6. Sia $I = \int_0^5 \sqrt{3x}\, dx$. Usare la notazione di sommatoria per scrivere le somme sinistra, destra e centrale di I per scrivere l'approssimazione con N sottointervalli uguali.

7. Trovare un integrale definito che è approssimato dalla somma destra $\frac{2}{100}\sum_{k=1}^{100} \sin\left(\frac{2k}{100}\right)$. Qual'è il valore dell'integrale ?

8. Trovare un integrale definito che è approssimato dalla somma centrale

$$\frac{2}{10}\sum_{k=1}^{40} \cos\left(\frac{2k-1}{10}\right)$$

Qual'è il valore dell'integrale?

9. La rapidità di consumo del petrolio nel mondo è crescente. Supponiamo che questa rapidità (misurata in milioni di barili all'anno) sia misurata dalla funzione $r(t)$, dove t è misurato in anni, e $t = 0$ è il 1° Gennaio, 1990.

   (a) Scrivere un integrale che rappresenta il totale di petrolio consumato nel mondo tra l'inizio del 1990 e la fine del 1995.

   (b) Supponiamo che $r(t) = 32e^{0.05t}$. Trovare un valore approssimato dell'integrale di (a) usando una somma destra con 6 sottointervalli.

   (c) Interpretare ognuno dei 6 sottointervalli in termini di consumo di petrolio.

   (d) Trovare il valore dell'integrale in (a) usando il TFCI.

10. Valutare il $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^3$ esprimendolo come integrale definito e, valutando quindi questo integrale usando il TFCI.

11. Per ognuno dei seguenti integrali definiti, tracciare un grafico che illustri le approssimazioni S_4, D_4, M_4 e T_4. Calcolare quindi le precedenti approssimazioni e confrontatele con il valore esatto degli integrali, calcolati con il TFCI.

   (a) $\int_{-2}^{2} x^2 dx$.

   (b) $\int_{-2}^{2} x^3 dx$.

(c) $\int_{-2}^{2} (x+1)\, dx$.

(d) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x\, dx$

12. Trovare un integrale definito per il quale $5 \sum_{k=1}^{3} f(5k)$ è

    (a) Una somma sinistra con 3 sottointervalli uguali;
    (b) Una somma destra con 3 sottointervalli uguali;
    (c) Una somma centrale con 3 sottointervalli uguali.

13. Trovare un integrale definito per il quale $S = 2(f(2) + f(4) + f(6) + f(8))$ è

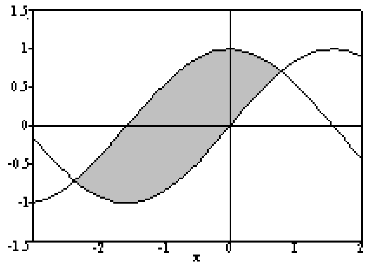
    (a) Una somma sinistra con 4 sottointervalli uguali;
    (b) Una somma destra con 4 sottointervalli uguali;
    (c) Una somma centrale con 4 sottointervalli uguali.

7.4 Aree nel Piano

Abbiamo definito l'integrale in termini di area limitata dal grafico di una funzione.

Gli integrali possono anche essere usati per misurare le aree di figura piane più generali., cioè aree limitate da due o più grafici. Le somme approssimanti mostrano come e perché.

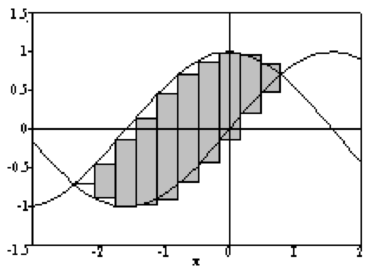
Esempio 264 *Usando un integrale, misurare l'area della figura piana compresa tra il grafico della funzione* $\sin x$ *e quello della funzione* $\cos x$



Area tra $y = \sin x$ *e* $y = \cos x$

Soluzione. La figura seguente suggerisce come trovare una soluzione approssimata. Tagliamo l'area in strisce verticali, approssimando ogni striscia con un rettangolo, quindi sommiamo tra loro le aree dei rettangoli. Ecco qui il disegno con dieci rettangoli. ▶

l primo rettan-
olo ha altezza
).



Area approssimata con 10
rettangoli sinistri

Notate con attenzione:

- Le due curve si intersecano nei punti $x = -3\pi/4$ e $x = \pi/4$. In questo intervallo $\cos x \geq \sin x$ quindi l'integrale da il valore vero dell'area anche se parte di essa giace sotto l'asse x.
- L'altezza di ogni rettangolo è determinata nel suo spigolo sinistro, $x = x_i$; l'altezza è $\cos x_i - \sin x_i$.
- L'area totale dei dieci rettangoli è S_{10}, la somma sinistra con dieci suddivisioni uguali per la funzione $\cos x - \sin x$ nell'intervallo $[-3\pi/4, \pi/4]$. Usando un computer si ha che $S_{10} = 2.80513$.

L'intuizione geometrica ci dice che quando $n \to \infty$, l'area L_n tende al valore esatto dell'integrale. Quindi, usando la definizione di limite dell'integrale, si ha che S_n tende all'integrale in questione. Per concludere

$$\textit{L'area tra le curve è l'integrale} \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\ dx\,.$$

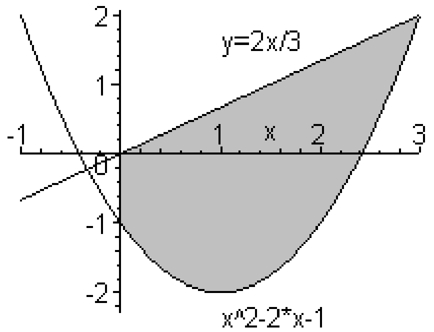
Trovare una risposta esatta è ora facile, grazie al TFCI:

$$\begin{aligned} Area &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\ dx \\ &= \sin x + \cos x]_{-3\pi/4}^{\pi/4} \\ &= 2\sqrt{2} \approx 2.82843 \end{aligned}$$

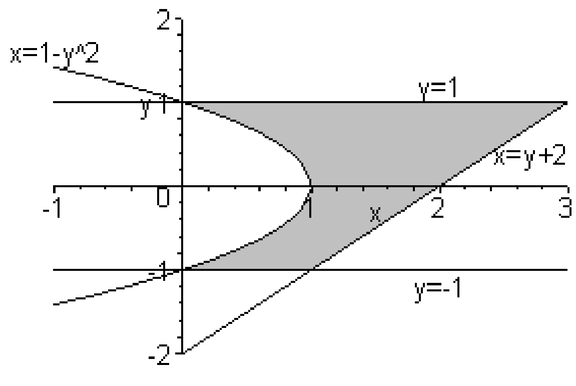
■

Vediamo adesso, sempre come esempio, altre regioni del piano, limitate da vari tipi di curve, che non sono sempre, necessariamente, grafici di funzione.

Due forme comuni sono:



Regione 1: curve sopra e sotto



Regione 2: curve a destra e sinistra

Le seguenti regole possono essere applicate a regioni della forma precedente.

Affermazione 265 *Siano f e g funzioni continue.*
Integrando in x. *Sia R la regione del piano limitata superiormente dalla curva $y = g(x)$, inferiormente dalla curva $y = f(x)$, a sinistra da $x = a$ ed a destra da $x = b$. Allora il valore dell'area di R è dato da*

$$\int_a^b (g(x) - f(x))\, dx\,.$$

Integrando in y . *Sia R la regione del piano limitata a destra dalla curva $x = g(y)$, a sinistra da $x = f(y)$, sotto da $y = c$ e sopra da $y = d$. Allora il valore dell'area di R è dato da*

$$\int_c^d (g(y) - f(y))\, dy\,.$$

Per la regione del tipo 2 , integrare in y può essere molto più semplice che non dividerla per integrare in x.

Attenzione all' Uso delle Regole

Un uso corretto ed efficiente delle regole di integrazione richiede, in genere, una combinazione di operazioni grafiche, algebriche e simboliche.

Illustriamo l'affermazione con alcuni esempi.

Esempio 266 *Trovare l'area della Regione* 1 *del grafico precedente.*

Soluzione. Troviamo l'intersezione dei grafici (anche se il disegno sembra suggerire $x = 3$). Si ha quindi

$$\frac{2}{3}x = x^2 - 2x - 1 \iff x = 3 \text{ o } x = -\frac{1}{3}\,.$$

Il punto a cui siamo interessati è solo il punto $x = 3$, visto che la regione che consideriamo è quella compresa nell'intervallo $[0, 3]$.

Applicando il primo caso dell'affermazione precedente, si ha

$$\text{Area} = \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x - \left(x^2 - 2x - 1\right)\right) dx\,.$$

Una semplice applicazione della ricerca di primitive (provare!) mostra che il risultato è 6. ■

Esempio 267 *Trovare l'area della Regione* 2 *del grafico precedente.*

Soluzione. L'integrazione rispetto ad x sembra impraticabile, poiché riuscire a trovare le curve inferiori e superiori non è semplice. Tuttavia, una osservazione più attenta alla figura, mostra che si può applicare il secondo caso dell'affermazione precedente. Ne segue

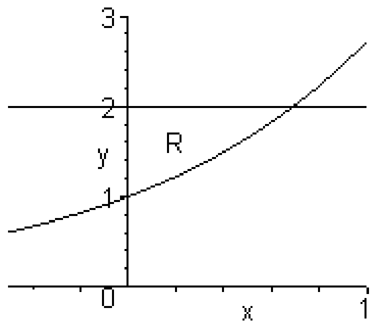
$$\text{Area} = \int_{-1}^1 \left(y + 2 - \left(1 - y^2\right)\right) dy\,.$$

Anche in questo caso, basta applicare la regola della ricerca delle primitive (fare !). Il valore dell'area è 8/3. ■

In alcuni casi calcolare l'integrale rispetto ad xo rispetto ad y è del tutto equivalente.

Esempio 268 *Trovare l'area della regione R limitata dalle curve $x = 0$, $y = 2$ e $y = e^x$.*

Soluzione. Il grafico è il seguente:



Grafici di $y = e^x$ e $y = 2$

Le due curve si intersecano per $\mathrm{e}^x = 2$, cioè $x = \ln 2$. Quindi

$$\text{Area di } R = \int_0^{\ln 2} (2 - e^x)\ dx\,.$$

Per trovare la stessa area in termini di y riscriviamo l'equazione $y = e^x$ nella forma equivalente $x = \ln y$; ne segue che:

$$\text{Area di } R = \int_1^2 \ln y\, dy\,.$$

Entrambi gli integrali sono facili da calcolare. Per il secondo, ricordando che $y \ln y - y$ è una primitiva di $\ln y$, si ha

$$\text{Area di } R = y \ln y - y]_1^2 = 2 \ln 2 - 1 \approx 0.3863\,.$$

■

7.4.1 Esercizi

1. Sia A la regione compresa tra le curve $y = x$ e $y = x^2$
   (a) Disegnare la regione;
   (b) Usa l'approssimazione sinistra, con 5 rettangoli, per approssimare il valore dell'area di A (dai una risposta numerica);
   (c) Tracciare un disegno che illustri la somma che hai calcolato in (b). Usa questo disegno per decidere se la tua stima era per eccesso o per difetto;
   (d) Trova l'area di A.
2. Trova l'area della regione limitata tra le curve $y = \sin x$ e $y = \cos x$, e le rette $x = 1$ e $x = 3$.
3. Trova l'area della Regione 2, descritta sopra, integrando rispetto ad x.
4. Disegna le regioni limitate dalle seguenti curve e calcola l'integrale:
   (a) $y = x^4$ e $y = 1$;
   (b) $y = x$ e $y = x^3$;
   (c) $y = x^2$ e $y = x^3$;
   (d) $x = y^2 - 4$ e $y = 2 - x$;
   (e) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x = 4$;
   (f) $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$;
   (g) $y = 9\,(4x + 5)^{-1}$ e $y = 2 - x$;
   (h) $y = 9\,(4x + 5)^{-1}$ e $y = 2 - x^2$;
   (i) $y = 2 + \cos x$, $y = \sec^2 x$, $x = -\pi/4$ e $x = \pi/6$;
   (j) $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$;
   (k) $y = 2^x$, $y = 5^x$, $x = -1$ e $x = 1$.