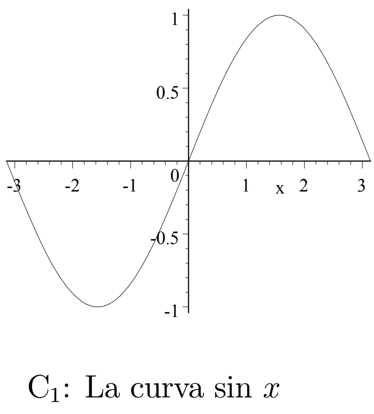
Capitolo 6

Curve nel piano

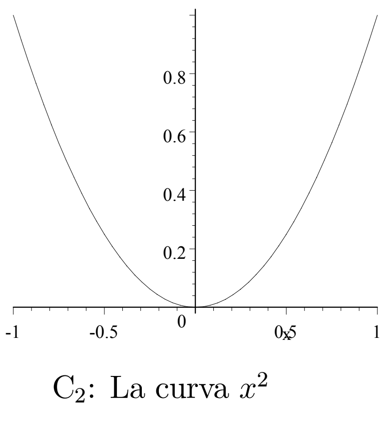
6.1 Curve Piane ed Equazioni Parametriche.

Introduzione: Vari Tipi di Curve.

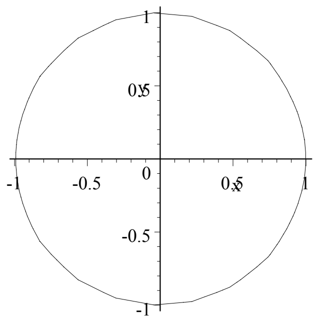
Le curve nel piano $x\,y$ si presentano con una tipologia molto variegata. Ecco quattro esempi base:

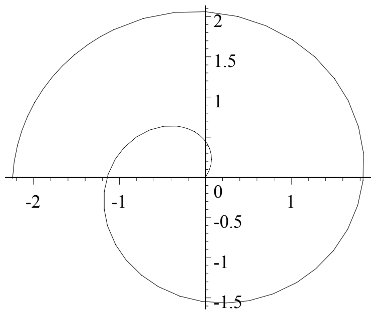


C$_1$: La curva $\sin x$



C$_2$: La curva x^2





C_3: La curva $x^2 + y^2 = 1$ C_4: La spirale $r = \log(\theta)$

Osservazione: le curve C_1 e C_2 sono **parti** di grafici di funzioni che sono familiari dall'analisi 1. Specificamente, la curva C_1 è quel pezzo del grafico della funzione $\sin(x)$ per $-\pi \leq x \leq \pi$; C_2 è il pezzo del grafico di $y = x^2$ che si ottiene quando $-1 \leq x \leq 1$. Usando le proprietà fondamentali delle funzioni siamo in grado di descrivere queste curve in dettaglio: dove crescono e decrescono, il valore del coefficiente angolare della retta tangente, concavità e convessità, etc. .

L'affermazione sopra che sono *parti* di grafico vuole dire, come chiaro dal contesto, che abbiamo considerato il grafico delle funzioni *restringendo l'attenzione ad un intervallo del dominio.*

Le curve C_3 e C_4 **non sono** grafici di funzioni, né di loro pezzi per il motivo (che dovrebbe essere noto) che esistono valori di x a cui corrispondono più valori di y . Tuttavia curve come quelle date da C_3 e C_4 sono estremamente significative da un punto di vista fisico ed applicativo e possono ben rappresentare il movimento di oggetti. Ricordo, per esempio, che intorno al 1600 l'astronomo Giovanni Keplero (Johannes Kepler) asserì che il moto dei pianeti intorno al sole segue un orbita ellittica e che alla fine del 1600 Isaac Newton usando i mezzi del calcolo differenziale verificò ed estese i risultati di Keplero

6.1.1 Equazioni Parametriche.

Consideriamo un punto P che si muove nel piano $x\,y$ durante un intervallo di tempo $a \leq t \leq b$. Le due coordinate di P saranno entrambe funzioni reali del tempo t , $x = f(t)$, $y = g(t)$, definite nell'intervallo $[a, b]$.
Quindi al variare del tempo, per $t \in [a, b]$ le due coordinate del punto $P(t) =$

$(f(t), g(t))$ descriveranno nel piano $\mathbb{R}^2$ "una qualche figura" che indicheremo con C. Dipendentemente dalla forma delle funzioni f e g, C può avere aspetti molto diversi: un segmento, un arco circolare, un punto, una spirale, il grafico di una funzione seno, una intricata ragnatela di segmenti o curve, o anche peggio. Anche considerando f e g funzioni continue la figura nel piano può avere le forme più strane.
Se f e g sono "sufficientemente regolari" allora la figura C diventa una "curva liscia" come le $C_1 - C_4$ sopra.

Chiariremo più avanti cosa intendiamo esattamente con le espressioni "sufficientemente regolari" e "curva liscia".

Introduciamo adesso un po' di vocabolario.
Equazioni della forma

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad \text{con} \quad a \le t \le b$$

sono chiamate **equazioni parametriche della curva** (o curva parametrica). La figura C tracciata nel piano xy dal punto $P(t) = (f(t), g(t))$ per $t \in [a, b]$ è chiamata **supporto della curva parametrica (** o più semplicemente **supporto**, ma a volte la chiameremo anche con abuso di linguaggio **curva)**, la variabile t è infine chiamata il **parametro**. Le funzioni f e g sono le **funzioni coordinate** e si dice che f e g *parametrizzano* la curva C.

Esempio 6.1 *Per* $0 \le t \le 12$ *consideriamo le equazioni parametriche*

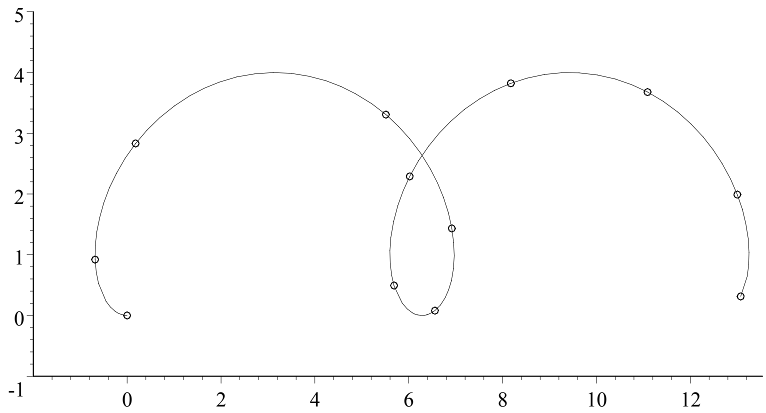
$$\begin{cases} x = t - 2 \sin t \\ y = 2 - 2 \cos t \end{cases} .$$

Quale supporto traccia il punto $P(t) = (t - 2 \sin t,\ 2 - 2 \cos t)$ *nel piano* xy *? Quanto vale* $P(1)$*? In quale direzione si muove* P*?*

Soluzione. Il modo più semplice, per cominciare, è quello di calcolare il valore di P per un certo numero di valori del parametro t e cercare poi da ciò di valutare la figura.
Di seguito si riporta il valore (approssimato alla seconda cifra decimale) di un certo numero di valori del parametro t.

t	0	0.1	0.2	0.7	0.8	0.9	1	$\cdots$	9.8	9.9	10	12
x	0	-0.10	-0.20	-0.59	-0.63	-0.67	-0.68	$\cdots$	10.53	10.82	11.09	11.45
y	0	0.01	0.04	0.47	0.61	0.76	0.92	$\cdots$	3.86	3.78	3.68	2.38

Ecco, la curva (supporto) C



La curva parametrica $(t - 2\sin t, 2 - 2\cos t)$, $t \in [0, 12]$

Da notare:

- **Non è un grafico.** Il supporto della curva C non è il grafico di una funzione, $y = f(x)$ perché ad alcuni valori di x corrispondono più di un valore di y;

- **Punti:** corrispondono a valori interi del parametro, da 0 a 12, a $t = 1$ P ha coordinate $(-0.68, 0.92)$ ed il movimento di P è "quasi verticale";

- **Non compare l'asse delle t.** La figura mostra gli assi x ed y ma non l'asse delle t.

- I valori delle coppie (x, y) come funzione di t compaiono solo nei punti in grassetto che indicano i valori interi del parametro, ed appaiono solo per convenienza del lettore. Servono, in questo primo approccio, anche a far vedere che ad intervalli di tempi uguali non corrispondono spazi percorsi uguali, cioè che la velocità lungo la traiettoria non è costante;

- **Linee chiuse, tangenti verticali ed altro.** Questo esempio ci mostra come le curve possano avere proprietà che non appaio nei grafici di funzione. Infatti, qui si osserva un circuito chiuso e punti interni al dominio con tangente verticale, nonostante le funzioni coordinate siano molto regolari. Vedremo, in altri esempi come coordinate regolari possano dar luogo a curve parametriche con angoli vivi ed altro.

■

Esempio 6.2 *Parametrizzare le curve C_1 e C_2 a inizio capitolo.*

Soluzione: L'idea più semplice è quella di usare la variabile indipendente come parametro t. Si ha

Per C_1	$x = t\,;\ \ y = \sin t\,;$	$-\pi \leq t \leq \pi$
Per C_2	$x = t\,;\ \ y = t^2$	$-1 \leq t \leq 1$

La stessa idea può essere usata per una qualsiasi funzione f definita su di un intervallo $[a, b]$. Infatti basta porre

$$x = t\,; \quad y = f(t)\ ; \quad a \leq t \leq b$$

per avere una parametrizzazione del grafico della funzione $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

■

Esempio 6.3 ***(segmento che unisce due punti).*** *Siano $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$ due punti in $\mathbb{R}^2$. Parametrizzare il segmento che unisce P con Q*

Soluzione: Una possibilità è la seguente. Poniamo la curva C uguale a

$$x(t) = a\ (1 - t) + c\,t\ ; \quad y(t) = b\ (1 - t) + d\,t\ ; \quad 0 \leq t \leq 1\ .$$

Notiamo subito che si ha $(x(0), y(0)) = (a, b) = P$ ed anche $(x(1), y(1)) = (c, d) = Q$.

Si ha perciò che C parte ed arriva nei punti giusti.

E' lasciato allo studente mostrare che per tutti i $t \in [0, 1]$ il punto $(x(t), y(t))$ giace sul segmento $\overline{PQ}$.

■

Esempio 6.4 *Parametrizzare l'equazione della circonferenza $x^2 + y^2 = r^2$*

Soluzione: La parametrizzazione più semplice la si può attuare usando le funzioni trigonometriche osservando che, preso un qualsiasi punto **P** sulla circonferenza, chiamato t l'angolo che il segmento che unisce **P** all'origine forma con l'asse x, le coordinate di **P** sono date da:

$$\mathbf{P} = (x, y) = (r\ \cos t,\ r\ \sin t)\ .$$

Se ne deduce che al variare di t nell'intervallo $[0, 2\pi]$ si coprono tutti i punti della circonferenza, per cui una possibile parametrizzazione è data da

$$x = r\ \cos t\,; \quad y = r\ \sin t\,; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

■

Nota 6.5 *Notare che abbiamo più volte affermato che quella trovata è* ***una*** *possibile parametrizzazione. Infatti di parametrizzazioni se ne possono trovare un'infinità. Eccone qui di seguito un paio di esempi.*

$$x = r\,\sin t\,; \quad y = r\,\cos t\,; \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

e ancora

$$x = r\,\cos 2t\,; \quad y = r\,\sin 2t\,; \qquad 0 \le t \le \pi\,.$$

Provare a valutare cosa distingue queste due parametrizzazioni dalla precedente.

Nota 6.6 *Come si fa a vedere che realmente queste tre diverse parametrizzazioni rappresentano lo stesso oggetto in* $\mathbb{R}^2$ *?*
Per vederlo cerchiamo di fare l'operazione opposta alle precedenti, cerchiamo cioè di eliminare il parametro t. Se si prende il quadrato delle componenti della prima parametrizzazione si ha

$$x^2 = r^2\,\cos^2 t\,; \quad y^2 = r^2\,\sin^2 t\,; \ \textit{da cui} \ \ x^2 + y^2 = r^2\,\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = r^2\ \ .$$

Procedimento analogo per le altre due.

ATTENZIONE Date le curve $x = r\,\cos t\,;\ y = r\,\sin t\,;\ 0 \le t \le 2\pi$ e $x = r\,\cos t\,;\ y = r\,\sin t\,;\ 0 \le t \le \pi$, un banale calcolo di eliminazione del parametro darebbe per entrambe l'equazione $x^2 + y^2 = 1$ ma questo vi indurrebbe in errore. **Perché?**

Abbiamo considerato fino ad ora l'equazione della circonferenza centrata nell'origine. Come si parametrizza l'equazione di una circonferenza di raggio r e di centro (a, b)?
Chiaramente quello che dobbiamo fare è una traslazione del centro della circonferenza dal punto $(0, 0)$ al punto (a, b), si ha quindi

$$(x - a) = r\cos t\,; \quad (y - b) = r\sin t; \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

o che è lo stesso

$$x = a + r\cos t\,; \quad y = b + r\sin t; \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

Esempio 6.7 *Dare due diverse parametrizzazioni della parabola* C_2 *ad inizio capitolo. In cosa differiscono?*

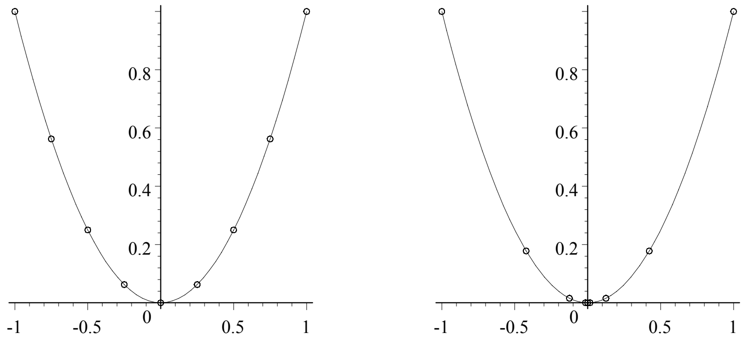
Soluzione: Differenti coppie di equazioni parametriche devono rappresentare esattamente la stessa curva geometrica. Per esempio

$$x = t\,; \quad y = t^2\,; \qquad -1 \leq t \leq 1$$

e

$$x = t^3\,; \quad y = t^6\,; \qquad -1 \leq t \leq 1$$

producono esattamente la stessa curva parabolica:

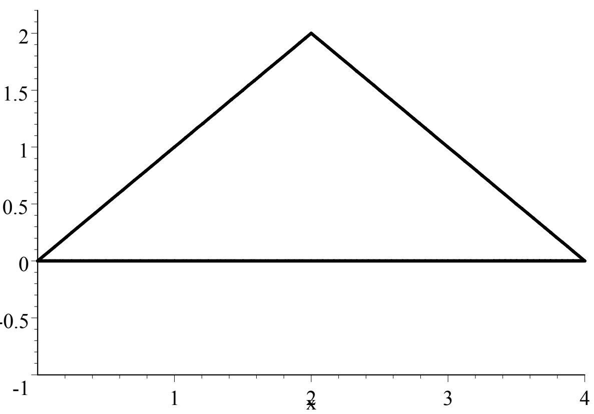


$x = t,\ y = t^2\,;\ -1 \leq t \leq 1 \qquad x = t^3\,,\ y = t^6\,;\ -1 \leq t \leq 1$

I punti sono calcolati in entrambi i casi con lo stesso intervallo del parametro t, $(-1,\ -3/4,\ -1/2,\ -1/4,\ 0,\ 1/4,\ 1/2,\ 3/4,\ 1)$.

■

Esempio 6.8 *Data la curva chiusa definita nel disegno sotto, scriverne una possibile parametrizzazione che percorra la curva in senso antiorario.*



C *è un triangolo di vertici* $(0,0)\,,\ (4,0)\,,\ (2,2)$

Soluzione. Volendo percorrere il sostegno in senso antiorario, va trovata una parametrizzazione che partendo, ad esempio, da $(0,0)$, arrivi a $(4,0)$, prosegua per $(2,2)$ per tornare infine in $(0,0)$. Una possibile parametrizzazione è la seguente

$$\begin{cases} (4\,t,0) & per \quad t\in[0,1] \\ (4\,(2-t)+2\,(t-1)\,,2\,(t-1)) & per \quad t\in[1,2] \\ (2\,(3-t)\,,2\,(3-t)) & per \quad t\in[2,3] \end{cases}$$

■

Invertire la direzione. Se consideriamo la curva

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad a\le t\le b$$

si ha che la curva viene percorsa a partire dal punto $(f(a)\,,g(a))$ per arrivare al punto finale $(f(b)\,,g(b))$. Viene spontaneo chiedersi come fare nel caso si volesse percorrere la curva nella direzione inversa mentre il parametro continua a variare tra a e b.
Il modo più semplice è quello di riscrivere la curva nel modo seguente

$$\begin{cases} x = f(a+b-t) \\ y = g(a+b-t) \end{cases} \quad a\le t\le b$$

Come si vede quando t varia tra a e b, $a+b-t$ varia tra b ed a.
Quindi nell'esempio precedente dovremmo, nel primo tratto, sostituire t con $(1-t)$, nel secondo t con $(3-t)$, infine nel terzo t con $(5-t)$; si ottiene così

$$\begin{cases} (4\,(1-t)\,,0) & per \quad t\in[0,1] \\ (4\,(2-(3-t))+2\,((3-t)-1)\,,2\,((3-t)-1)) & per \quad t\in[1,2] \\ (2\,(3-(5-t))\,,2\,(3-(5-t))) & per \quad t\in[2,3] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (4\,(1-t)\,,0) & per \quad t\in[0,1] \\ (4\,(t-1)+2\,((2-t))\,,2\,((2-t))) & per \quad t\in[1,2] \\ (2\,(t-2)\,,2\,(t-2)) & per \quad t\in[2,3] \end{cases}$$

■

Differenti intervalli parametrici. Come ovvio per tutti l'autostrada A1 è sempre la stessa ogni giorno o notte dell'anno, ciò che può cambiare

percorrendola in giorni diversi è la velocità con cui la si percorre.
Così se C è la curva parametrizzata da

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

C può essere parametrizzata anche usando l'intervallo unitario, $0 \leq t \leq 1$ nel seguente modo

$$\begin{cases} x = f(a + (b-a)t) \\ y = g(a + (b-a)t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1 \ .$$

Viceversa, se una curva è parametrizzata da

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

può essere parametrizzata usando l'intervallo $[a, b]$ come

$$\begin{cases} x = f\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right) \\ y = g\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$$

Curve polari come equazioni parametriche. Curve sono spesso definite in coordinate polari come equazioni della forma $r = f(\theta)$ con $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Ricordiamo adesso che in coordinate polari le componenti cartesiane sono descritte da $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. I punti sulle curve polari hanno quindi una forma parametrica naturale, in coordinate cartesiane, espressa da

$$\begin{cases} x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta \\ y = r\sin\theta = f(\theta)\sin\theta \end{cases} \quad \alpha \leq \theta \leq \beta \ .$$

La curva polare $r = 4$ per esempio, ha come forma parametrica

$$\begin{cases} x = 4\cos\theta \\ y = 4\sin\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \ .$$

che è la familiare parametrizzazione della circonferenza di raggio 4 percorsa in senso antiorario.

6.2 Esercizi

Note per l'uso della tecnologia. *Maple* può essere molto utile per controllare le risposte date ad alcuni dei seguenti esercizi. Ricordiamo qui alcuni dei comandi di *Maple* per disegnare curve parametriche.

```
>plot( [sin(t), cos(t),t=0..2*Pi]);
>plot( [sin(t), cos(t),t=0..2*Pi], -3..3, -1..1);
>plot( [t,t^2,t=0..2]);
>plot( [t,t^2,t=0..2],scaling=constrained);
>plot( {[t,t^2,t=-1..1],[t,1,t=-1..1]});
```

Controllare anche il comando >`parametricplot`

1. Provare a disegnare le curve parametriche sotto indicate. Capire e segnare sul grafico la direzione in cui vengono percorse e marcare i punti corrispondenti a $t = -1, t = 0$, e $t = 1$.

   (a) $x = t,\ y = \sqrt{1-t^2}\,,\ \ -1 \le t \le 1;$

   (b) $x = t,\ y = -\sqrt{1-t^2}\,,\ \ -1 \le t \le 1;$

   (c) $x = \sqrt{1-t^2},\ y = t\,,\ -1 \le t \le 1;$

   (d) $x = -\sqrt{1-t^2}\,,\ t = t\,,\ \ -1 \le t \le 1;$

   (e) $x = \sin(\pi t)\ ,\ y = \cos(\pi t)\ ,\quad -1 \le t \le 1;$

2. Scrivere ognuna delle curve polari qui di seguito in forma parametrica, quindi provare a disegnare il risultato. Confrontarlo, eventualmente, con quello trovato usando il software.

   (a) La cardioide $r = 1 + \cos\theta\,,\quad 0 \le \theta \le 2\pi;$

   (b) La curva polare $r = \sin\theta\,,\quad 0 \le \theta \le \pi;$

   (c) La spirale di Archimede $r = \theta\,,\quad 0 \le \theta \le 4\pi.$

3. Trovare almeno una parametrizzazione (c'è più di una possibilità) per ognuna delle curve descritte sotto.

   (a) Il segmento che unisce i punti $(0,0)$ e $(1,2)$ (muovendosi da sinistra a destra);

   (b) Il segmento che unisce i punti $(0,0)$ e $(1,2)$ (muovendosi da destra a sinistra);

(c) Il cerchio unitario, partendo ed arrivando ad est muovendosi in senso antiorario;

(d) Il cerchio unitario, partendo ed arrivando ad est muovendosi in senso orario;

(e) La semicirconferenza unitaria, in senso antiorario partendo da nord per arrivare a sud;

(f) Il cerchio unitario ma usando come intervallo parametrico $0 \leq t \leq 1$.

4. Le curve sotto rappresentano segmenti. Scrivere l'equazione cartesiana dei segmenti.

   (a) $x = 2 + 3t\,,\ \ y = 1 + 2t, \quad 0 \leq t \leq 1;$

   (b) $x = 2 + 3\ (1 - t)\ ,\ \ y = 1 + 2\ (1 - t)\,, \quad 0 \leq t \leq 1;$

   (c) $x = t\,,\ \ y = m\,t + b\,, \quad 0 \leq t \leq 1;$

   (d) $x = a + bt,\ \ y = c + dt\,, \quad 0 \leq t \leq 1;$

   (e) $x = x_0 + (x_1 - x_0)\ t\,,\ \ y = y_0 + (y_1 - y_0)\ t\,, \quad 0 \leq t \leq 1;$

5. Considerare la curva dell'Esempio 1 supponendo che t indichi la variabile tempo in secondi.

   (a) In quale dei punti indicati (interi) ti aspetti che il punto si muova più velocemente? Più lentamente? Perché?

   (b) Usare le equazioni parametriche per valutare la velocità per $t = 3$, e per $t = 6$.

6. Disegnare le curva parametrica

$$x = t^3;\ \ y = \sin t^3, \qquad -2 \leq t \leq 2$$

   Cosa si ottiene? Come lo confronteresti con la curva classica?

7. Sia $(a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \ r > 0$. Consideriamo l'equazione parametrica

$$x = a + r\cos t\,,\ y = b + r\sin t\,,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$$

   (a) Disegnare la curva parametrica nel caso $(a, b) = (2, 1)\,,\ r = 2$. Descrivere il risultato in generale.

   (b) Mostrare, usando il calcolo, che se $x,\ y$ sono quelli sopra si ha $(x - a)^2 + (y - b^2) = r^2$;

(c) Scrivere le equazioni parametriche della circonferenza di raggio $\sqrt{13}$ centrata nel punto $(2, 3)$

8. Siano a, b numeri positivi non nulli. Consideriamo la curva parametrica

$$x = a\cos t\,,\ y = b\sin t\,,\quad 0 \le t \le 2\pi$$

   (a) Provare che l'equazione del sostegno rappresenta un ellisse;

   (b) Cosa accade se $0 \le t \le 4\pi$?;

9. Dare due diverse parametrizzazioni della parabola di inizio capitolo.

6.3 Funzioni a Valori Vettoriali

Fino ad adesso abbiamo sempre considerato funzioni a **valori scalari,** cioè funzioni i cui valori sono degli scalari. Anche le funzioni a più variabili considerate nel quarto capitolo, come ad esempio $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z$, sono funzioni scalari. Per questo tipo di funzione usiamo la notazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ che esplicita il fatto che il dominio di f è un insieme dello spazio tridimensionale e la sua immagine è uni-dimensionale, cioè i valori $f(x)$ sono degli scalari.

Una **funzione a valori vettoriali** è tale che la sua immagine appartiene ad uno spazio pluridimensionale. Consideriamo come esempio la funzione definita dalla legge

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \ .$$

Per tale funzione la notazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ha senso perché t, la variabile indipendente di f è un elemento di $\mathbb{R}$ e produce come risultato dell'applicazione di f il vettore $(\cos t, \sin t)$ che è un elemento di $\mathbb{R}^2$. Le due componenti del vettore immagine sono chiamate **funzioni componenti** o **funzioni coordinate.**

Nel paragrafo precedente abbiamo studiato le curve nel piano parametrizzate dalle funzioni $x(t)$ e $y(t)$. *In che modo (se lo sono) le curve sono legate alle funzioni a valori vettoriali*?

Esempio 6.9 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *la funzione definita da* $f(t) = (\cos t, \sin t)$. *Come è correlata* f *ad una curva parametrica? Quale curva?*

Soluzione. Abbiamo visto nel paragrafo precedente che

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

è una parametrizzazione della circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ percorsa in senso antiorario a partire dal punto $(1, 0)$. Allora, per ogni valore di t il vettore $f(t) = (\cos t, \sin t)$ può essere pensato come il vettore posizione di un punto sulla circonferenza unitaria. Se pensiamo a t come elemento di $\mathbb{R}$ allora mentre t percorre l'intervallo $(-\infty, \infty)$ il vettore $(\cos t, \sin t)$ percorre la circonferenza infinite volte, in senso antiorario, ogni volta per ogni intervallo di ampiezza 2π.

Se, per esempio, vogliamo percorrere solo la semicirconferenza a destra dell'origine, basta restringere l'intervallo del parametro:

$$x = \cos t\,, \quad y = \sin t\,; \quad -\pi/2 \leq t \leq \pi/2\ .$$

Nel linguaggio delle funzioni a valori vettoriali possiamo affermare che $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$.

■

- **La stessa idea, due punti di vista.** Come mostra il precedente esempio, la differenza tra un paio di equazioni parametriche e una funzione a valori vettoriali è molto sottile. Noi useremo entrambe le due nozioni in modo più o meno intercambiabile.

6.3.1 Derivate delle Funzioni a Valori Vettoriali, Vettori Tangenti.

La derivata di una funzione a valori vettoriali si trova in modo "ovvio", differenziando rispetto alla variabile t le singole componenti separatamente.

Definizione 6.10 *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da $f(t) = (x(t), y(t))$. La derivata di f è una funzione a valori vettoriali $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da*

$$f'(t) = \frac{d}{dt} f(t) = (x'(t), y'(t)) \quad .$$

Calcolare queste derivate non è più complicato del calcolare le derivate per le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Per esempio,

$$f(t) = (\cos t, \sin t) \implies f'(t) = (-\sin t, \cos t) \ ;$$

Ciò che è interessante dal punto di vista applicativo è il significato geometrico che assume la derivata. Qui scriviamo il risultato fondamentale, discuteremo più avanti il perché.

Definizione 6.11 *Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una funzione a valori vettoriali che descrive una curva piana C come indicato sopra.*
Supponiamo che $f'(t) \neq (0, 0)$ per ogni $t \in (a, b)$. Per tutti i valori $t_0 \in (a, b)$, il vettore $f'(t_0)$ è tangente alla curva C nel punto $f(t_0)$, e punta nella direzione di t crescente. Inoltre, il modulo $|f'(t_0)|$ ci dice qual'è la velocità (in termini di unità di misura di t) con la quale $f(t)$ si muove lungo C.

In altri termini, se $f(t)$ descrive la **posizione** di una particella che si muove nel piano, la derivata $f'(t)$ descrive la **velocità** allo stesso istante.

Esempio 6.12 *Consideriamo la funzione lineare* $L(t) = (x_0, y_0) + t\ (x_1, y_1)$ *. Cosa ci dice la definizione sopra?*

Soluzione. Poiché $L(t) = (x_0, y_0) + t\ (x_1, y_1) = (x_0 + t\,x_1, y_0 + t\,y_1)$ si ha che $L'(t) = (x_1, y_1)$. Si ha quindi che la derivata è una funzione costante di valore (x_1, y_1) .Questo risultato è consistente con la definizione sotto due aspetti:

1. (a) i. Il vettore (x_1, y_1) è tangente ad L in ogni punto ed ha il verso nella direzione delle t crescenti;
   ii. In ogni unità di tempo, la posizione $L(t)$ aumenta di un multiplo di (x_1, y_1), cioè $L(t)$ si muove con velocità $\sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

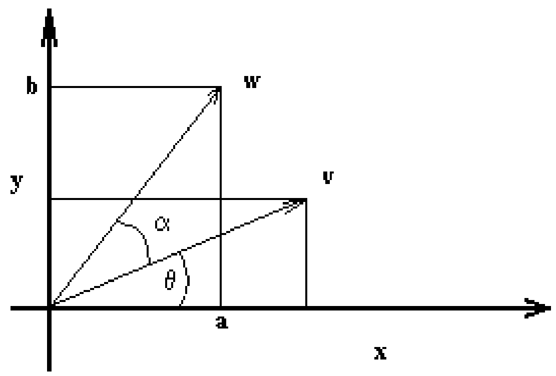
■

6.3.2 Rotazione

Dato un vettore $v = (a, b)$ è talvolta utile trovare un nuovo vettore w con la stessa norma di v, che formi con v un angolo α assegnato. Un minimo di geometria e trigonometria (verifica) ci dicono che

$$w = (a\cos\alpha - b\sin\alpha, a\sin\alpha + b\cos\alpha)$$

In particolare, se $\alpha = \pi/2$ allora $w = (-b, a)$



Due vettori rotati di α e loro proiezioni

Esercizio 6.13 *Ruotare il vettore* $v = (1, 2)$ *di un angolo* $\alpha = \pi/3$ *radianti.*

Soluzione. Seguendo la formula descritta sopra si ha

$$\begin{aligned} w &= (1\cos(\pi/3) - 2\sin(\pi/3), 1\sin(\pi/3) + 2\cos(\pi/3)) \\ &= \left(\frac{1}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\,\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right). \end{aligned}$$

■

La procedura applicata qui ad un vettore può essere applicata anche al caso in cui si volesse ruotare di un angolo α una curva. Vediamolo con un esempio

Esempio 6.14 *Consideriamo la curva* C *data in forma vettoriale da*

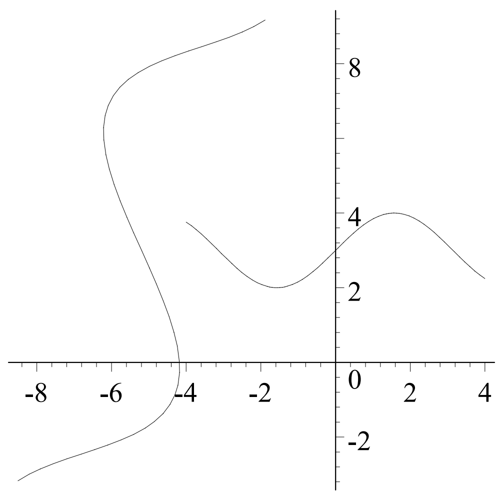
$$r(t) = (t, 3 + \sin t)\ ; \quad -3 \leq t \leq 3$$

Essendo $\alpha = \pi/3$ *applicare la formula della rotazione al vettore posizione* $r(t)$ *per formare una nuova curva* $r_\alpha(t)$.

Soluzione. Come visto sopra $\cos(\pi/3) = 1/2$ e $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Applicando la formula di rotazione si ottiene

$$r_\alpha(t) = \frac{1}{2}\left(t - \sqrt{3}(3 + \sin t), \sqrt{3}t + (3 + \sin t)\right)\ ; \quad -3 \leq t \leq 3$$

■



Le due curve ruotate di $\pi/3$

6.3.3 Il Vettore Velocità e la Lunghezza di una Curva.

Se C è una curva è descritta in forma vettoriale , e pensiamo alla variabile indipendente t come al tempo, allora per ogni valore t_0 il vettore derivata

$$r'(t_0) = (x'(t_0)\,,\ y'(t_0))\ ,$$

porta in sé due informazioni importanti:ù

1. (a) Il **modulo del vettore velocità:**

   $$|r'(t_0)| = \sqrt{x'^2(t_0) +\ y'^2(t_0)}\ ,$$

   che dà la velocità istantanea (in unità di distanza per unità di tempo) con la quale $r(t)$ si muove lungo C.

   (b) La **direzione del vettore velocità.** Se $r'(t_0) \neq (0,0)$, allora $r'(t_0)$ è un vettore tangente alla curva nel punto $(x(t_0)\,,\ y(t_0))$ e punta nel verso delle t crescenti.

Esempio 6.15 *Sia* C *la curva parametrizzata da*

$$r(t) = (\cos t, 2\ \sin t)\ , \quad 0 \leq t \leq 2\pi\ .$$

Trovare l'equazione parametrica della retta $l(t)$ che passa per $r(\pi/3)$ con direzione data da $r'(\pi/3)$.

Soluzione. Calcoliamo $r(\pi/3) = (\cos\pi/3, 2\sin\pi/3) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$. Il vettore velocità è dato da

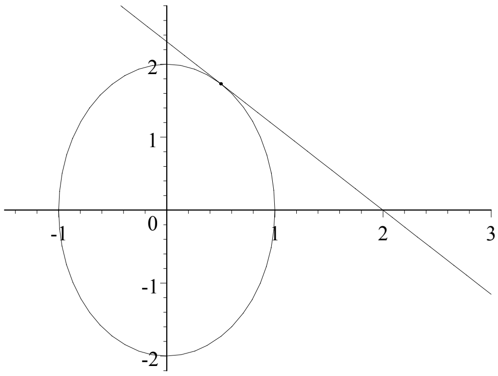
$$r'(t) = (-\sin t, 2\cos t)$$

e quindi si ha che $r'(\pi/3) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$. Ne segue quindi che l'equazione parametrica della retta cercata è data da

$$l(t) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right) + t\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}t, \sqrt{3} + t\right)$$

■

Vediamo graficamente l'equazione della curva e della retta



La curva $r(t)$ e la retta tangente in $r(\pi/3)$

Quanto è lunga una curva C descritta da $r(t) = (x(t), \; y(t)) \quad a \leq t \leq b$?

Abbiamo detto prima che la velocità con la quale C viene percorsa è data al tempo t da:

$$|r'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + \; y'^2(t)} \; ,$$

Ricordando dalla fisica che per trovare la distanza totale percorsa da un oggetto in movimento si deve integrare la funzione velocità, poniamo in questo caso il seguente fatto:

Affermazione 6.16 ***(Lunghezza di una curva). Sia*** C *una curva come sopra, parametrizzata nell'intervallo $a \leq t \leq b$. La lunghezza della curva è data da*

$$\textit{Lunghezza di } C = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + \; y'^2(t)} \, dt$$

Cerchiamo di illustrare con esempi le implicazioni positive o meno di questo fatto.

Esempio 6.17 *Trovare la lunghezza della semicirconferenza superiore unitaria.*

Soluzione. Usiamo la seguente parametrizzazione della semicirconferenza :

$$r\,(t) = (\cos t, \sin t)\ ; \quad 0 \le t \le \pi$$

Poiché $r'\,(t) = (-\sin t, \cos t)$ si ha

$$Lunghezza\ di\ C = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\, dt = \int_0^\pi 1\, dt = \pi\ .$$

■

Esempio 6.18 *Trovare la lunghezza della semicirconferenza superiore unitaria parametrizzata da* $r\,(t) = (\cos t^2, \sin t^2)\ ; \quad 0 \le t \le \sqrt{\pi}$.

Soluzione. Apparentemente il problema è più complicato, la velocità è data da $r'\,(t) = (-2\,t \sin t^2, 2\,t \cos t^2)$. Il modulo della velocità è dato da

$$\sqrt{(-2\,t \sin t^2)^2 + (2\,t \cos t^2)^2} = \sqrt{4\,t^2 \left(\sin^2 t^2 + \cos^2 t^2\right)} = 2\,t$$

Si ha allora

$$Lunghezza\ di\ C = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\,t\, dt = \pi\ .$$

Abbaiamo così visto che pur usando parametrizzazioni diverse il risultato della lunghezza non cambia. Pur non essendo una dimostrazione, questo risultato ci fa intuire che *la lunghezza di una curva è una proprietà intrinseca alla curva stessa e non dipende dalla scelta della parametrizzazione.*

■

Nota. Gli esempi dati sembrerebbero voler mostrare che calcolare la lunghezza di una curva sia facile.

In realtà non è così. Spesso la radice quadrata presente nell'integrale da luogo a situazioni che non permettono di calcolare esattamente l'integrale. In queste situazioni bisogna ricorrere ad una valutazione numerica dell'integrale.

Esempio 6.19 *Valutare la lunghezza della curva* $r\,(t) = (t, \sin t)\ , \quad 0 \le t \le \pi$.

Soluzione. La lunghezza della curva è data dall'integrale

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2 t}\, dt \quad .$$

Sfortunatamente questo integrale non può essere calcolato in forma chiusa. Possiamo, però, usare metodi numerici per la valutazione dell'integrale, come per esempio quello legato alla regola del punto intermedio di un intervallo, si ottiene così (usando *Maple*)

```
>middlesum(sqrt(1+(cos(x))^2)), x=0..Pi, 20);
```

$$3.820197791$$

■

Terminiamo questa sezione sulle curve piane con l'esempio di una nuova curva costruita a partire da una curva assegnata, la **concoide.**

Definizione 6.20 *Una* ***concoide*** *è definita come segue: Siano dati una curva* C, un punto fissato P_0*, ed un numero* k*. Per ogni punto* P *su* C*, si determina un punto* Q *muovendosi verso l'esterno di* k *unità di distanza lungo la linea che unisce* P *e* P_0*. L'insieme di tutti i punti* Q *così costruiti definisce la concoide.*

Esempio 6.21 *Sia* $P_0 = (0,0)$, $k = 1$*, e* C *una curva data nella forma vettoriale* $r(t) = (x(t), y(t))$, $a \le t \le b$*. Scrivere l'equazione vettoriale della concoide generata da* P_0 *e da* r*.*

Soluzione Per ottenere la concoide cercata bisogna aggiungere al vettore $r(t)$ una unità di distanza del vettore $\overrightarrow{P_0 P}$ cioè $r(t) / |r(t)|$. Si ha così

$$q(t) = r(t) + \frac{r(t)}{|r(t)|} = r(t)\left(1 + \frac{1}{|r(t)|}\right)$$

■

6.4 Esercizi

Maple può essere utile per la verifica di molti degli esercizi che seguono.

1. Consideriamo la linea l passante per il punto $P = (1, 2)$ nella direzione definita dal vettore $v = (2, 3)$.

   (a) La linea l è l'immagine della funzione a valori vettoriali $L(t) = (1, 2) + t(2, 3)$ con $t \in \mathbb{R}_+$. Disegnare la retta e segnare i punti corrispondenti al valore del parametro $t = 0,\ t = -1,\ t = 1,\ t = 2$.

   (b) Qual'è l'immagine di $L(t) = (1, 2) + t(2, 3)$ se si restringe il dominio a $t \geq 0$?

   (c) Qual'è l'immagine di $L(t) = (1, 2) + t(2, 3)$ se si restringe il dominio a $-1 \leq t \leq 1$?

2. Ripetere l'esercizio precedente in modo astratto essendo l la linea passante per (a, b) nella direzione individuata dal vettore (c, d) (si assuma che c e d non siano entrambi zero).

3. Consideriamo la funzione $F(t) = (\cos t, \sin t)$.

   (a) Disegnare la curva definita da F. Trovare il valore di $F(t)$ e di $F'(t)$ per i seguenti valori: $t = 0,\ t = \pi,\ t = \pm\pi/2,\ t = \pi/4$.

   (b) Disegnare tutti i vettori della parte (a) sul cerchio unitario (Disegnare i vettori $F(t)$ con vertice nell'origine; disegnare invece i vettori $F'(t)$ con il vertice sull'appropriato punto della circonferenza).

4. Rifare l'esercizio 3 essendo $F(t) = (\sin t, \cos t)$.

5. Rifare l'esercizio 3 essendo $F(t) = (t, \sin t)$

6. Usare le formule di rotazione per trovare l'espressione in forma vettoriale di ognuna delle seguenti curve:

   (a) La parabola $y = x^2$ ruotata di $\pi/4$ radianti in senso antiorario.

   (b) La curva seno, ma ruotata così da andare da nord-ovest a sud-est.

   (c) La cardioide $r = 1 + \cos\theta$, ruotata di $\pi/4$ in senso orario [**Sugg**: trova prima l'equazione della cardioide in forma parametrica].

7. Fare questo esercizio nello spirito dell'esempio del capitolo. In ogni parte, trovare una curva lineare $l(t)$ che passa per $r(t_0)$ con vettore direzione $r'(t_0)$.

   (a) $r(t) = (t^2, t^3)$; $t_0 = 1$.

   (b) $r(t) = (\cos t, \sin t)$; $t_0 = \pi/4$.

   (c) $r(t) = (t, \sin t)$; $t_0 = \pi/4$.

   (d) $r(t) = (t \sin t, t \cos t)$; $t_0 = \pi$.

8. Considerare la curva C data da $r(t) = (3\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (a) Dare l'equazione della curva C in termini di x e di y.

   (b) Trovare e disegnare la nuova curva C_1 che si ottiene ruotando C di un angolo di $\pi/4$ in senso antiorario.

   (c) Trovare e disegnare la nuova curva C_2 che si ottiene ruotando C di un angolo di $\pi/2$ in senso antiorario. Scrivere una equazione in x ed in y per C_2.

9. Disegnare le curve qui sotto e valutarne la lunghezza "ad occhio". Calcolatene inoltre la lunghezza esattamente se possibile, altrimenti stimate la risposta usando la somma approssimante fatta usando il punto di mezzo degli intervalli; usate 20 suddivisioni.

   (a) $r(t) = (3 + t, 2 + 3t)$, $0 \le t \le 1$.

   (b) $r(t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, $0 \le t \le \pi$.

   (c) $r(t) = (\cos 3t, \sin 3t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (d) $r(t) = (3\sin t, \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

   (e) $r(t) = (t\cos t, t\sin t)$, $0 \le t \le 4\pi$.

10. Usare la formula generale per la concoide per costruire nuove curve rispetto a quelle assegnate. Disegnarle entrambe.

    (a) La concoide basata su $p(t) = (2\sin t, 2\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

    (b) La concoide basata sulla linea retta $x = 1$. [**Sugg**: scrivere prima l'equazione vettoriale di questa curva].

    (c) La concoide basata sulla spirale $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $0 \le t \le 4\pi$.

6.5 Moti Bidimensionali

Una funzione a valori vettoriali $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ è, in essenza, una coppia di funzioni reali di variabile reale. In quel che segue useremo la notazione

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t)) \ ;$$

dove f_1, f_2 sono le componenti di f. Per definire la derivata della funzione f basta costruire il rapporto incrementale per la funzione e passare poi al limite. Si ottiene

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(t+h),\, f_2(t+h)) - (f_1(t),\, f_2(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(t+h) - f_1(t),\, f_2(t+h) - f_2(t))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h} \right) \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{f_2(t+h) - f_2(t)}{h} \right) \\
&= \left(f_1'(t),\, f_2'(t) \right)
\end{aligned}$$

l'ultimo passaggio ha, ovviamente, senso solo se le due funzioni componenti f_1, f_2 sono derivabili come funzioni reali di variabile reale. Se ne deduce perciò che una funzione a valori vettoriali è derivabile se lo sono le sue componenti.

Dal punto di vista delle applicazioni, si ha allora che se indichiamo con $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ il vettore posizione come funzione della variabile tempo, allora, come noto dalla fisica, il vettore velocità v ed il vettore accelerazione a sono legati al vettore posizione dalle relazioni

$$v(t) = p'(t), \ a(t) = v'(t) = p''(t)$$

che in componenti diventano

$$v_1(t) = p_1'(t), \ v_2(t) = p_2'(t) \ ; \ \ a_1(t) = v_1'(t) = p_1''(t), \ a_2(t) = v_2'(t) = p_2''(t)$$

Dalla definizione di derivata di una funzione a valori vettoriali ne deriva anche la definizione di primitiva e di integrale.

6.5.1 Primitive e Integrali di una Funzione a Valori Vettoriali

Così come le derivate, anche gli integrali delle funzioni a valori vettoriali vengono trovate componente per componente. In simboli

$$\text{Se } f = (f_1,\ f_2)\,,\ \text{allora} \int f\,dt = \left(\int f_1\,dt, \int f_2\ dt\right).$$

Mostriamo ciò che intendiamo con un esempio.

Esempio 6.22 *Sia $f(t) = (1,2) + (3,4)\ t$. Trovare una primitiva della funzione f.*

Soluzione. Le due componenti della funzione f sono $f_1(t) = 1 + 3t,\ f_2(t) = 2 + 4t$. Si ha allora che

$$\begin{aligned} \int f(t)\ dt &= \int (1+3t, 2+4t)\ dt = \left(\int (1+3t)\ dt, \int (2+4t)\ dt\right) \\ &= \left(t + 3t^2/2 + C_1, 2t + 2t^2 + C_2\right) \end{aligned}$$

dove C_1, C_2 sono costanti arbitrarie.

Se si fattorizza in t si ottiene

$$t(1,2) + \frac{t^2}{2}(3,4) + (C_1, C_2)\,.$$

Entrambe le forme sono corrette, la seconda mette meglio in evidenza come è stata costruita la risposta a partire da f.

■

Teorema 6.23 *Siano f e g due funzioni vettoriali differenziabili. Allora, le funzioni $f+g$, $a \cdot f$, $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \cdot g$ (somma, prodotto per una funzione scalare e prodotto scalare delle funzioni) sono differenziabili con le seguenti derivate*

$$\begin{array}{lcll} (f(t) + g(t))' &=& f'(t) + g'(t) & \textit{somma} \\ (a(t) \cdot f(t))' &=& a'(t) \cdot f(t) + a(t) \cdot f'(t) & \textit{prodotto con funzione scalare} \\ (f(t) \cdot g(t))' &=& f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t) & \textit{prodotto scalare} \end{array}$$

Dimostrazione. Ci limiteremo a dimostrare la proprietà relativa al prodotto scalare. Si consiglia gli studenti di provare a dimostrare le altre due proprietà.

$$\begin{aligned}
(f(t)\cdot g(t))' &= (f_1(t)\,g_1(t)+f_2(t)\,g_2(t))' \\
&= f_1'(t)\,g_1(t)+f_1(t)\,g_1'(t)+f_2'(t)\,g_2(t)+f_2(t)\,g_2'(t) \\
&= f_1'(t)\,g_1(t)+f_2'(t)\,g_2(t)+f_1(t)\,g_1'(t)+f_2(t)\,g_2'(t) \\
&= f'(t)\cdot g(t)+f(t)\cdot g'(t)\,.
\end{aligned}$$

■

Esempio 6.24 *Usare le regola appropriata per differenziare la funzione* $g(t) = t(\cos t, \sin t)$.

Soluzione. Possiamo considerare la funzione come il prodotto della funzione scalare $a(t) = t$ con la funzione vettoriale $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Si ha allora:

$$g'(t) = 1\cdot(\cos t, \sin t) + t(-\sin t, \cos t) = (\cos t - t\,\sin t, \sin t + t\,\cos t)\,.$$

■

Funzioni a Valori Vettoriali di Modulo Costante

Consideriamo il caso di una funzione vettoriale f di modulo costante, cioè di una funzione f tale che $|f(t)| = k$ il che implica che $f(t)\cdot f(t) = k^2$. Poiché il lato destro dell'equazione è una costante (k^2) si ha che la derivata del prodotto scalare di f per se stessa è zero, cioè

$$(f(t)\cdot f(t))' = 2f(t)\cdot f'(t) = 0.$$

Si ha quindi un fatto interessante:
Sia f una funzione a valori vettoriali differenziabile di modulo costante rispetto al tempo ($|f(t)| = k$). Allora il vettore $f(t)$ e $f'(t)$ sono perpendicolari per ogni valore di t.

Esempio 6.25 *Consideriamo la funzione $f(t) = (\sin t, \cos t)$. Il modulo di f è dato da $|f(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$. f ha quindi modulo costante. La derivata è data da $f'(t) = (\cos t, -\sin t)$. Il prodotto scalare tra f ed f' è dato da*

$$f(t)\cdot f'(t) = (\sin t, \cos t)\cdot(\cos t, -\sin t) = \sin t\,\cos t - \cos t\,\sin t = 0.$$

Posizione, Velocità ed Accelerazione nel Piano

Usando le metodologie appena sviluppate, possiamo modellare i moti bidimensionali. L'idea chiave è che accelerazione (intesa vettorialmente), velocità e posizione sono legate tra loro dalle operazioni di derivazione ed antiderivazione. Cominciamo con i casi più semplici.

Accelerazione Nella modellizzazione dei moti fisici, è spesso naturale iniziare lo studio ricavando informazioni sull'accelerazione per passare poi a velocità e posizione. L'accelerazione, nella pratica, compare naturalmente per la sua stretta connessione alla forza. La **seconda legge di Newton** stabilisce infatti che:

Una forza agente su un punto materiale produce un'accelerazione che è direttamente proporzionale alla forza ed inversamente proporzionale alla massa.

Le forze (gravitazionale, resistenza dell'aria, attrito, forza di lancio di un razzo) possono essere misurate direttamente e (grazie alla legge di Newton) convertite in informazioni sull'accelerazione.

Gravità e Accelerazione Come certamente sapete, la gravità terrestre spinge tutto verso il centro della terra producendo un'accelerazione verso il basso, che chiamiamo *accelerazione di gravità*, che ha lo stesso valore per tutti i corpi, indipendentemente dalla loro forma o peso. Il modulo dell'accelerazione di gravità può essere considerata costante quando si pensi di lavorare "vicino" alla superficie terrestre. Il suo valore è $g \approx 9,81$ metri al secondo quadrato.

Supponiamo di essere in un sistema in cui l'accelerazione è il vettore zero. Come si scrive l'equazione oraria dello spazio?.

Soluzione. Per quanto riguarda la velocità si ha

$$a(t) = (0,0) \Longrightarrow v(t) = \int (0,0)\ dt = \left(\int 0\, dt, \int 0\, dt\right) = (C_1, C_2)\,,$$

dove C_1, C_2 sono costanti arbitrarie.

Per quanto riguarda la posizione $p(t)$ si ha

$$\begin{aligned} v(t) &= (C_1, C_2) \Longrightarrow p(t) = \int (C_1, C_2)\ dt = \left(\int C_1 dt, \int C_2 dt\right) \\ &= (C_1 t + C_3, C_2 t + C_4) \end{aligned}$$

dove (C_3, C_4) sono costanti arbitrarie.

In casi specifici le quattro costanti si possono valutare usando addizionali informazioni sul sistema quali la velocità e la posizione del sistema al tempo zero.

Da notare, che anche in assenza di valori numerici per le costanti, i calcoli fatti ci dicono una cosa molto interessante. *In assenza di forze esterne, un oggetto ha accelerazione zero, velocità costante, e una funzione della posizione lineare.* (Principio di Galileo).

■

Esempio 6.26 *Al tempo $t = 0$, una particella nel piano ha velocità $(1, 2)$ e posizione $(3, 4)$ (Questi dati sono anche chiamati condizioni iniziali.) Non ci sono forze esterne agenti così che l'accelerazione è $a(t) = (0, 0)$ Descrivere il moto della particella. Qual'è la posizione per $t = 100$?*

Soluzione. Come abbiamo visto dall'esercizio precedente si ha che $v(t) = (C_1, C_2)$ da cui $v(t) = (1, 2)$.

Da ciò si ricava che $p(t) = (C_1 t + C_3, C_2 t + C_4) = (t + C_3, 2t + C_4)$, quindi $p(0) = (C_3, C_4) = (3, 4)$.

Infine si ha $p(t) = (t + 3, 2t + 4) = t\ (1, 2) + (3, 4)$. Per $t = 100$ si ha che $p(100) = 100\,(1, 2) + (3, 4) = (103, 204)$.

■

Accelerazione Costante In questo semplice esempio l'accelerazione è costante, ma diversa da zero. Questo è un caso importante che si ha quando una forza costante (per.es. la forza di gravità) agisce su di un oggetto. Supponiamo quindi che sia $a(t) = (a_1, a_2)$ .Allora

$$v(t) = \int (a_1, a_2)\ dt = t\ (a_1, a_2) + (C_1, C_2)$$

dove (C_1, C_2) sono costanti arbitrarie. Poiché $v(0) = (C_1, C_2)$, le costanti rappresentano le coordinate della velocità iniziale dell'oggetto. Per trovare la posizione integriamo ancora

$$p(t) = \int (t\ (a_1, a_2) + (C_1, C_2))\ dt = \frac{t^2}{2}(a_1, a_2) + t\ (C_1, C_2) + (C_3, C_4)$$

dove ancora (C_3, C_4) è un vettore arbitrario. poiché $p(0) = (C_3, C_4)$ questo vettore costante rappresenta la posizione iniziale dell'oggetto.
Si noti, in particolare, che accelerazione costante implica velocità *lineare* e posizione *quadratica.*

Esempio 6.27 *Un oggetto parte da fermo all'origine ed ha accelerazione costante $a = (1, 2)$. Che posizione e velocità possiede per $t = 100$?.*

Soluzione. Dall'esercizio precedente si ricava che essendo la sua la sua posizione iniziale $(C_3, C_4) = (0, 0)$ le funzioni posizione e velocità sono date da

$$v(t) = t\ (1, 2)\ , \quad p(t) = \frac{t^2}{2}(1, 2)$$

Dopo 100 secondi la velocità è data da $v(100) = 100\ (1, 2) = (100, 200)$ Il modulo della velocità è $100\sqrt{5} \approx 223,6$ unità per secondo e la posizione è $p(100) = 5000\,(1, 2) = (5000, 10.000)$.

■

Caduta Libera Un corpo che sia soggetto alla sola gravità si dice che è in **caduta libera.** Nella realtà gli oggetti che cadono sono sempre soggetti a qualche altra forza, resistenza dell'aria, vento laterale, etc.. In alcuni casi queste forze si possono considerare trascurabili, altre volte no. E' comunque importante capire cosa accade in caduta libera, anche come primo passo verso la costruzione di modelli più complicati.
Poiché stiamo considerando moti bidimensionali ci mettiamo nel piano $x\,z$. In tal caso il vettore accelerazione è dato da $a(t) = (0, -g)$ essendo la forza di gravità verticale e diretta verso il basso.

Usando il modello precedente in cui $a(t) = (a_1, a_2) = (0, -g)$ si ottiene

$$v(t) = t\ (0, -g) + (C_1, C_2)$$

dove (C_1, C_2) sono costanti arbitrarie. Poiché $v(0) = (C_1, C_2)$, le costanti rappresentano le coordinate della velocità iniziale dell'oggetto.

$$p(t) = \frac{t^2}{2}(0, -g) + t\ (C_1, C_2) + (C_3, C_4)$$

dove (C_3, C_4) rappresenta la posizione iniziale dell'oggetto.

Esempio 6.28 *Un proiettile in caduta libera lascia l'origine al tempo $t = 0$, con velocità iniziale di $100\ m/\sec$ formando un angolo α con l'orizzontale. Quale cammino descrive il proiettile? Dove atterra? (l'asse delle x rappresenta il livello orizzontale).*

Soluzione. Le condizioni date ci dicono che

$$a(t) = (0, -g) \ , \quad v(0) = 100\,(\cos\alpha, \sin\alpha) \ , \quad p(0) = (0,0) \, .$$

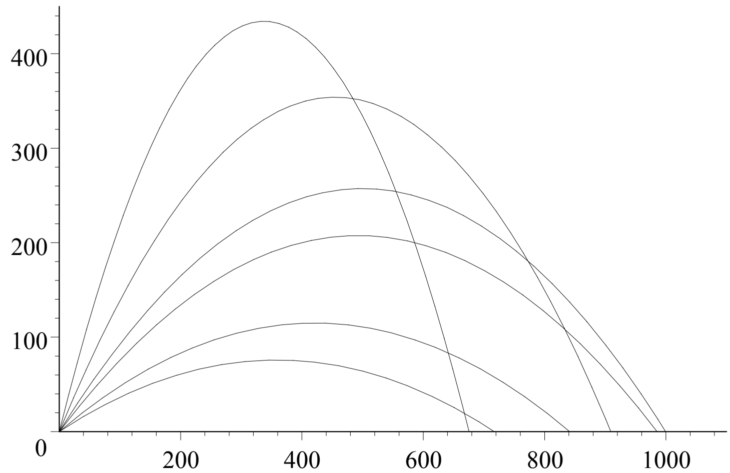
Quindi, usando i calcoli effettuati sopra si ottiene

$$\begin{aligned} v(t) &= t\ (0, -g) + 100\,(\cos\alpha, \sin\alpha) \ , \\ p(t) &= \frac{t^2}{2}\ (0, -g) + 100\, t\ (\cos\alpha, \sin\alpha) \, . \end{aligned}$$

La curva parametrica $p(t)$ ha equazioni parametriche della forma

$$x(t) = 100\, t\ \cos\alpha \, ; \quad z(t) = -g\,\frac{t^2}{2} + 100\, t\ \sin\alpha$$

Vediamo qui di seguito alcuni esempi di tali curve al variare di α



Traiettorie per vari angoli iniziali

I grafici suggeriscono quella che fu la risposta di Galileo: le traiettorie sono parabole.

Per un dato valore dell'angolo α il proiettile atterra quando si ha $y(t) = 0$, cioè

$$\frac{-g\, t^2}{2} + 100\, t \sin\alpha = 0$$

Risolvendo in t si ottiene

$$t = 0 \text{ (istante di partenza)}, \quad t = \frac{200 \sin \alpha}{g}$$

per questo valore di t la distanza dall'origine è data da

$$x\left(\frac{200 \sin \alpha}{g}\right) = 100 \cdot \frac{200 \sin \alpha}{g} \cos \alpha$$

che ci da la gittata del proiettile. Se, per esempio $\alpha = \pi/4$ si ha che la gittata è $\dfrac{100 \cdot 200}{g} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{10.000}{g} \approx 1020.$

■

6.5.2 Esercizi

1. Trovare la velocità e la posizione come funzioni del tempo sapendo che:

   (a) $a(t) = 0,\ v(0) = 0,\ p(0) = 0;$

   (b) $a(t) = 0,\ v(0) = 1,\ p(0) = 0;$

   (c) $a(t) = 1,\ v(0) = 1,\ p(0) = 0;$

   (d) $a(t) = t,\ v(0) = 0,\ p(0) = 0.$

2. Siano $v, w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$e $\lambda \in \mathbb{R}_+$ Dimostrare che $(v(t) + w(t))' = v'(t) + w'(t)$ e $(\lambda v(t))' = \lambda v'(t)$.

3. Un oggetto viene lanciato dall'origine con velocità iniziale nulla. Trovare l'equazione parametrica della posizione sapendo che il vettore accelerazione è dato da $a(t) = (1, -1)$. Eliminare poi la variabile t nell'equazione parametrica della curva ottenuta.

4. Al tempo $t = 0$ una particella si trova nell'origine con velocità $(4, 4)$, subendo un'accelerazione costante $a(t) = (0, -1)$.

   (a) Trovare la formula della velocità $v(t)$ e della posizione $p(t)$;

   (b) Disegnare $p(t)$ nell'intervallo $0 \leq t \leq 10$;

   (c) Eliminare la variabile t nell'equazione parametrica della curva $p(t)$;

   (d) Trovare la lunghezza della curva $p(t)$ nell'intervallo $0 \leq t \leq 10$.

5. Nell'ultimo esempio si è mostrato che un proiettile con velocità iniziale $100m/sec$ ed angolo di tiro α segue una curva data parametricamente dalle equazioni

$$x(t) = 100\,t\,\cos\alpha\,; \quad y(t) = -g\,\frac{t^2}{2} + 100\,t\,\sin\alpha\ .$$

   (a) Eliminando il parametro t trovare l'equazione della parabola nel piano $x\,y$;

   (b) Mostrare che la gittata massima si ottiene per $\alpha = \pi/4$ e valutarne il valore.

6. Un proiettile ha velocità iniziale $v_0\ m/sec$, angolo iniziale α e viaggia in caduta libera finché non cade sul terreno.

(a) Trovare le equazioni delle funzioni velocità e posizione;

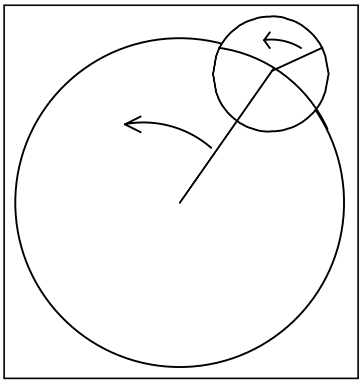
(b) Per quale valore del tempo raggiunge l'altezza massima?

(c) Trovare il valore del vettore velocità nel punto più alto e valutarne il modulo;

(d) Trovare il valore del vettore velocità nel punto di impatto e valutarne il modulo.

6.5.3 Moti Lineari, Circolari e Combinati.

Un braccio di un robot industriale, composto da due componenti, potrebbe essere descritto come segue:



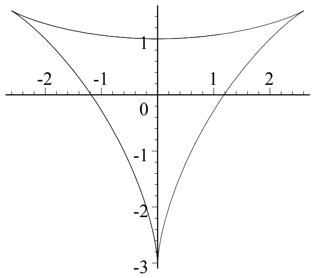
(6.1)

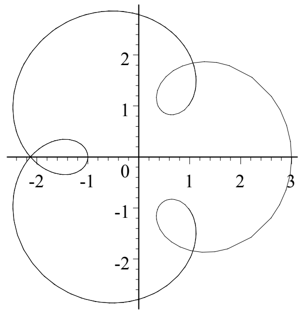
Il braccio maggiore ruota intorno ad un asse, mentre il minore ha il suo centro che si muove sulla circonferenza generata dal moto del braccio maggiore. Ogni braccio è capace di moto indipendente.

Le prime domande che si pongono sono: Quale traiettoria può percorrere l'estremità del braccio del robot? Quale è l'espressione della sua posizione, velocità ed accelerazione al variare del tempo? (il controllo dell'accelerazione è importante essendo essa proporzionale alla forza agente sull'estremità).

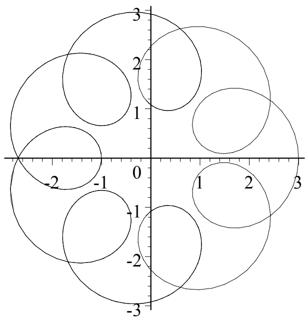
Ad un primo sguardo questi problemi possono sembrare di difficile soluzione. La risposta dipende, dopo tutto, da molte variabili: la lunghezza dei due bracci, la velocità di movimento ed il moto relativo, per esempio.
Vedremo come tutto ciò possa essere risolto in modo abbastanza semplice impiegando gli strumenti del calcolo di funzioni a valori vettoriali.

La strategia: studiare separatamente il moto delle due parti e successivamente ricomporre il sistema.
Per avere una visione di quello che può succedere, i disegni sotto mostrano tre possibili movimenti del robot





Un primo percorso Un secondo percorso



Un terzo percorso

Spiegheremo più avanti come abbiamo realizzato questi percorsi.

Modellizzazione del Moto Lineare

Come vi è ben noto, il moto su di una linea retta, a velocità costante, è chiamato **moto lineare uniforme**. Questo tipo di moto è facilmente modellato usando una funzione posizione di tipo lineare, cioè, come abbiamo visto nella sezione precedente

$$p(t) = (x_0, y_0) + t\ (a, b)$$

che ci dice che al tempo $t = 0$ la particella parte dalla posizione (x_0, y_0) e che si muove nella direzione indicata dal vettore velocità (a, b) con una velocità costante di modulo $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Esempio 6.29 *Supponiamo che una particella si muova linearmente nel piano, a velocità costante partendo dal punto* $(1,2)$ *al tempo* $t = 0$ *per arrivare al punto* $(5,6)$ *al tempo* $t = 3$. *Trovare le funzioni posizione, velocità e accelerazione della particella.*

Soluzione. Consideriamo il vettore $v = (5,6) - (1,2) = (4,4)$ .Questo unisce il punto $(1,2)$ al punto $(5,6)$. Per percorrere questo cammino la particella impiega $3\,\mathrm{sec}$. Il vettore velocità è allora dato da $(4,4)/3 = (4/3, 4/3)$. Il vettore posizione è allora dato da $p(t) = (1,2) + t\ (4/3, 4/3)$. Il vettore velocità è , ovviamente $v(t) = (4/3, 4/3)$, mentre l'accelerazione è ovviamente nulla, $a(t) = (0,0)$.

Il modulo della velocità è dato da $\sqrt{4^2 + 4^2}/3 = \sqrt{32}/3 \approx 1,89\ m/\sec$.

■

Modellizzazione del Moto Circolare

Il moto lungo un cammino circolare che abbia modulo della velocità costante è chiamato **moto circolare uniforme.** I due casi particolari sotto riportati sono di grande utilità:

Affermazione 6.30 *Per ogni centro* (x_0, y_0) *e per ogni valore del raggio* $R > 0$, *la funzione posizione* $p(t) = (x_0, y_0) + R(\cos t, \sin t)$, *modella un moto circolare uniforme antiorario di raggio* R *intorno al punto* (x_0, y_0), *avente modulo di velocità uguale ad* R.
Il vettore posizione $p(t) = (x_0, y_0) + R(\sin t, \cos t)$ *modella un moto circolare uniforme orario di raggio* R *intorno al punto* (x_0, y_0) *avente modulo di velocità uguale ad* R

Esempio 6.31 ***(Velocità diverse).*** *Una particella ha una funzione posizione data da*

$$p(t) = (x_0, y_0) + R(\cos(\alpha t), \sin(\alpha t)),$$

con $\alpha > 0$ *costante positiva. Quale differenza comporta la presenza della costante?*

Soluzione. La presenza della costante α non modifica il fatto che il moto si svolga sulla circonferenza di raggio R centrata nel punto (x_0, y_0) .
La differenza la si trova quando si vanno a considerare velocità ed accelerazione. Infatti, differenziando si ha

$$v(t) = \alpha R(-\sin(\alpha t), \cos(\alpha t));$$

ne segue che il modulo della velocità è $|v(t)| = \alpha R$.
In modo analogo

$$a(t) = \alpha^2 R(-\cos(\alpha t), -\sin(\alpha t))$$

La presenza della costante α ha quindi l'effetto di moltiplicare il modulo della velocità per α ed il modulo dell'accelerazione di α^2.

■

Esempio 6.32 *(Cambio di velocità). Una particella si muove in senso antiorario, con velocità costante s , su di una circonferenza di raggio R e centro (x_0, y_0). Trovare la funzione posizione.*

Soluzione Se consideriamo la funzione posizione

$$p(t) = (x_0, y_0) + (R\cos t, R\sin t)$$

abbiamo che il vettore velocità del sistema è dato da

$$(-R\sin t, R\cos t)$$

e quindi il punto ha velocità di modulo costante uguale ad R. . Per le proprietà della derivazione, se adesso moltiplichiamo il parametro t per $\frac{s}{R}$ e consideriamo perciò la nuova funzione posizione

$$p(t) = (x_0, y_0) + \left(R\cos t\,\frac{s}{R}, R\sin t\,\frac{s}{R}\right)$$

abbiamo che la nuova funzione posizione ha la velocità richiesta.

■

Esempio 6.33 *Una particella parte dal punto $(2,3)$ al tempo $t = 0$. Si muove con velocità di modulo 1 su di una circonferenza centrata in $(2,0)$ fin quando non raggiunge la posizione $(-1,0)$. Trovare la funzione posizione.*

Soluzione. Il raggio della circonferenza è 3, così che $p(t) = (2,0) + (3\cos t, 3\sin t)$ descrive una particella partente dal punto $(5,0)$ al tempo $t = 0$. Per partire dal punto $(2,3)$ si può operare una rotazione angolare di $\pi/2$ e considerare il vettore posizione

$$p(t) = (2,0) + \left(3\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), 3\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (2,0) + (-3\sin t, 3\cos t) .$$

Questo nuovo vettore ha velocità di modulo 3. Per ottenere la velocità richiesta di 1 bisogna allora considerate il vettore

$$p\left(t\right)=\left(2,0\right)+\left(-3\sin\frac{t}{3},3\cos\frac{t}{3}\right).$$

La particella arriva nel punto $(-1,0)$ quando $t=\dfrac{3\pi}{2}$.

■

Moto Circolare, Accelerazione e Forza Centripeta Supponiamo che una particella si muova di moto circolare uniforme con velocità s su di una circonferenza di raggio R centrata nell'origine. Per quanto detto prima l'equazione di moto è data da

$$p\left(t\right)=\left(R\cos t\frac{s}{R},R\sin t\frac{s}{R}\right).$$

Differenziando due volte si ottiene l'espressione del vettore velocità

$$a\left(t\right)=\frac{s^2}{R^2}\left(-R\cos t\frac{s}{R},-R\sin t\frac{s}{R}\right)=-\frac{s^2}{R}\left(\cos t\frac{s}{R},\sin t\frac{s}{R}\right)$$

Il calcolo che ci ha portato ha trovare il vettore accelerazione è banale, ma il risultato è molto interessante dal punto di vista fisico:

> In un moto circolare uniforme di velocità s su di una circonferenza di raggio R , il vettore accelerazione punta sempre verso il centro della circonferenza ed ha modulo $\dfrac{s^2}{R}$.

A prima vista può sembrare sorprendente che un moto circolare di velocità costante generi un'accelerazione. Ma, ricordando la seconda legge di Newton che la forza è proporzionale all'accelerazione ed anche le sensazioni provate quando si ruota un oggetto legato ad una corda o quando si affronta in velocità una curva stretta, si riconosce la presenza di una **forza centripeta.** Quello che il calcolo afferma è che tale forza è proporzionale al quadrato della velocità ed inversamente proporzionale al raggio.
Per gli automobilisti l'indicazione è chiara, prendere curve strette ad alta velocità non è un idea brillante.

6.5.4 Principio di Sovrapposizione degli Effetti

Molti moti di interesse applicativo, come ad esempio quelli di un braccio di robot, sono semplici combinazioni di moti lineari e circolari. E' importante, da un punto di vista fisico, che queste combinazioni di moti possano essere rappresentati, da un punto di vista matematico, come combinazione di funzioni a valori vettoriali.
Vediamo il significato di quanto detto attraverso alcuni esempi.

Esempio 6.34 *Consideriamo un braccio snodato di robot. Assumiamo* ***(i)*** *che il braccio lungo abbia lunghezza* 1*;* *(ii) che quello corto abbia lunghezza* 0.4*;* ***(iii)*** *che il braccio lungo ruoti in senso antiorario compiendo una rotazione in* π *secondi;* ***(iv)*** *che il braccio corto ruoti in senso antiorario compiendo* 8 *rotazioni in* 2π *secondi. Trovare la funzione posizione dell'estremo del braccio.*

Soluzione L'estremo del braccio lungo compie un moto circolare uniforme di centro $(0,0)$ e raggio 1 con velocità unitaria, quindi la funzione posizione ha forma

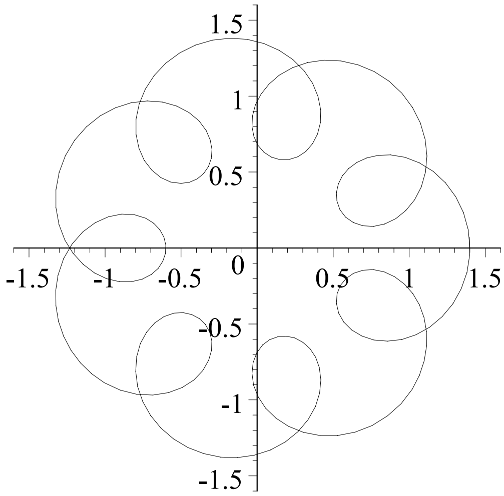
$$p_l\left(t\right) = \left(\cos t, \sin t\right) \ .$$

Il braccio corto, se fosse fissato all'origine, avrebbe come funzione posizione il vettore

$$p_c\left(t\right) = \left(0.4\cos\left(8t\right), 0.4\sin\left(8t\right)\right) \ .$$

Il robot combina i due moti spostando il centro di rotazione alla fine del braccio lungo.
Si ottiene il risultato voluto sommando i vettori posizione

$$p\left(t\right) = \left(\cos t, \sin t\right) + \left(0.4\cos\left(8t\right), 0.4\sin\left(8t\right)\right)$$



Moto del robot

Un risultato simile si ottiene combinando, per esempio, un moto lineare ed un moto circolare uniforme. ■

Esempio 6.35 *Combiniamo il moto lineare uniforme*

$$p_{lin}(t) = (t, 1)$$

con il moto circolare uniforme

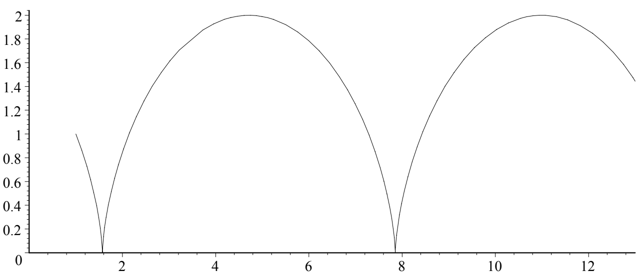
$$p_{cir}(t) = (\cos, -\sin t) \ .$$

Cosa rappresenta la combinazione

$$p(t) = (t + \cos t, 1 - \sin t)$$

dei due moti?

Soluzione. Il grafico del moto nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq 4\pi$ è dato da



La curva è chiamata **cicloide** e rappresenta il moto di un punto sul bordo di un cerchio che ruota, mentre il centro trasla. ■

6.6 Esercizi.

1. Scrivere l'equazione che modella un dato moto lineare uniforme. Usare *Maple* o altro software per disegnare il cammino della particella come curva parametrica.

   (a) La particella parte da $(0,0)$ a $t = 0$ e viaggia verso $(1,2)$ con velocità costante uguale a 1.

   (b) La particella parte da $(1,2)$ a $t = 0$ e viaggia verso $(0,0)$ con velocità costante uguale a 1.

   (c) La particella parte da $(2,1)$ a $t = 0$ e viaggia verso $(5,6)$ con velocità costante uguale a 100.

   (d) La particella è in $(1,2)$ a $t = 1$ e in $(5,6)$ al tempo $t = 10$.

2. Sia $p(t) = (x_0, y_0) + (R\cos t, R\sin t)$.

   (a) Mostrare che $|p(t) - (x_0, y_0)| = R$.

   (b) Mostrare che p ha velocità costante uguale ad R.

   (c) Trovare $v(0)$. Come si collega il risultato al fatto che il moto è antiorario?

3. Consideriamo il vettore posizione $p(t) = (1,2) + (3\cos t, -3\sin t)$ con $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

   (a) Descrivere geometricamente il cammino della particella. In quale direzione viaggia?

   (b) Mostrare che p ha velocità di modulo 3.

   (c) Trovare $v(0)$. Cosa dice la risposta rispetto alla direzione di viaggio?

4. In ognuno degli esercizi sotto, scrivere la funzione vettoriale che modella il moto circolare uniforme descritto. Usare poi il software per disegnare la curva posizione.

   (a) Centro $(0,0)$ raggio 3, velocità di modulo 1 e direzione antioraria. Una rotazione completa partendo da est

   (b) Centro $(0,0)$ raggio 3, velocità di modulo 2 e direzione oraria. Una mezza rotazione partendo da est.

(c) Centro $(1, 2)$ passando per $(4, 5)$, velocità di modulo 1 e direzione antioraria. Una rotazione intera partendo da $(4, 5)$.

5. Rifare l'esempio del braccio del robot di pagina 210 assumendo che il braccio piccolo ruoti 4 volte (invece di 8) volte più veloce del braccio lungo in senso antiorario. Disegnarne il grafico per $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Rifare l'esempio del braccio del robot di pagina 210 assumendo che il braccio piccolo ruoti 4 volte (invece di 8) volte più veloce del braccio lungo, ma in senso orario. Disegnarne il grafico per $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Rifare l'esempio del braccio del robot di pagina 210 assumendo questa volta che il braccio lungo ruoti 4 volte più veloce del braccio corto, in senso antiorario. Disegnarne il grafico per $0 \leq t \leq 2\pi$.

8. Considerare un robot come nell'esempio di pagina 210 assumendo questa volta che (i) il braccio lungo ha lunghezza 2; (ii) il braccio corto ha lunghezza 1; (iii) il braccio lungo ruota uniformemente in senso antiorario compiendo una rotazione in 2π secondi; (iv) il braccio corto ruota, in senso antiorario, facendo 4 rotazioni in 2π secondi.

   (a) Trovare la funzione posizione dell'estremo del braccio;

   (b) Trovare il vettore velocità;

   (c) Trovare il modulo di velocità dell'estremo. Usarla per trovare la lunghezza di un ciclo (se necessario usare un software per fare un'integrazione numerica dopo aver impostato l'integrale).

   (d) Trovare il vettore accelerazione come funzione del tempo.

9. Questo esercizio riguarda l'Esempio 6.35 di pag. 211.

   (a) Trovare il vettore velocità. Usare il risultato per trovare i punti nei quali la velocità è $(0, 0)$. Come appaio questi punti nel grafico?

   (b) Trovare l'espressione orario del modulo della velocità. Usarla per trovare (esattamente) la lunghezza della curva;

   (c) Mostrare che l'accelerazione ha modulo costante.

6.6.1 Curvatura

Chiunque abbia guidato un auto su di una strada tortuosa, anche su un terreno pianeggiante ed a bassa velocità, sa la tensione a cui sono sottoposti il motore, i freni ed i passeggeri. Anche l'eventuale carico risente delle curve, spostandosi, in special modo in quelle più strette, quelle che chiamiamo curve "secche", quelle col più piccolo "raggio di curvatura".

Ciò che vogliamo definire e calcolare in questa sezione è la misura matematica di quanto rapidamente una curva piana "curva" intorno ad un punto dato. L'analogia dell'automobile ci dice come ci siano buone ragioni teoriche ed applicative (disegno di strade e circuiti di vario tipo) per saper misurare la curvatura di una curva.
Come è da aspettarsi, in generale, la curvatura di una curva varia da punto a punto. Per esempio, se consideriamo la parabola $y = x^2$ la curvatura è maggiore intorno al vertice e diventa sempre minore allontanandosi da esso dove la parabola diventa sempre più simile ad una retta. In una circonferenza, per contrasto, la curvatura è la stessa in ogni punto, essendo *maggiore la curvatura quanto minore è il raggio.* Su di una linea retta la curvatura è ovunque zero.
Cerchiamo di formalizzare adesso l'idea usando gli strumenti che abbiamo introdotto per lo studio delle curve.

Definizione di Curvatura

Sia una curva C data attraverso il vettore posizione $p(t) = (x(t), y(t))$. Definiamo la curvatura in un punto $p(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Ricordo che per ogni t il vettore velocità $v(t) = (x'(t), y'(t))$ è tangente a C nel punto $p(t)$. La nozione di curvatura misurerà quanto velocemente il vettore velocità ruota rispetto alla distanza percorsa lungo la curva. Per questo scopo siamo più interessati alla *direzione* del vettore velocità che al suo modulo. Scriviamo allora il vettore velocità nella forma

$$v(t) = s(t)\, T(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$$

dove $s(t)$ rappresenta il modulo del vettore velocità e $T(t)$ è il **vettore unitario tangente** a C al tempo t.
La curvatura a $t = t_0$ ci dice quanto velocemente la direzione tangente (data da $T(t)$) varia "rispetto alla lunghezza d'arco", cioè rispetto alla distanza viaggiata lungo la curva. Per questo scopo ci calcoliamo il modulo $|T'(t_0)|$ della derivata $T'(t_0)$. Il suo valore ci dice quanto il vettore direzione tangente varia per unità di *tempo.* Per trovarne la variazione rispetto alla lunghezza

d'arco dividiamo allora il modulo per il valore della velocità per $t = t_0$.
La definizione formale è quindi la seguente

Definizione 6.36 ***(Curvatura).*** *Sia data una curva* C *definita dal vettore posizione* $p(t) = (x(t), y(t))$. *Assumiamo che il modulo della velocità* $s(t_0) \neq 0$ *nel punto* t_0. *La curvatura di* C *nel punto* $p(t_0)$ *è definito da*

$$\frac{|T'(t_0)|}{s(t_0)}$$

Vediamo, attraverso esempi, di capire il senso alla definizione.

Linee rette. Per una funzione di tipo lineare il vettore tangente $T(t)$ è costante, così $T'(t) = (0, 0)$. Ne consegue che una linea retta (come ci saremmo aspettati) ha curvatura zero.

Circonferenze. Se C è una circonferenza di raggio R allora l'espressione del vettore posizione è, come ben noto, data da

$$p(t) = (R\cos t, R\sin t) \ .$$

Si ha quindi

$$v(t) = (-R\sin t, R\cos t) \ , \quad s(t) = R \, , \quad T(t) = (-\sin t, \cos t) \ .$$

Quindi, per ogni t si ha

$$curvatura = \frac{|T'(t)|}{s(t)} = \frac{|(-\cos t, -\sin t)|}{R} = \frac{1}{R} \ .$$

Come ci si aspettava, la curvatura è la stessa in ogni punto della circonferenza, inoltre maggiore è il raggio, minore la curvatura.

L'esempio precedente motiva la seguente:

Definizione 6.37 *Se C ha curvatura K nel punto P, diremo che C ha* ***raggio di curvatura*** $1/K$ *in P.*

Velocità diversa, stessa curvatura. La curvatura, per sua definizione dovrebbe dipendere dalla curva stessa, non dal modo in cui la si percorre, cioè dalla particolare parametrizzazione scelta per rappresentare la curva. E' infatti l'espressione al denominatore della definizione (il valore del modulo della velocità) che tiene conto di questo fatto. Lo vediamo bene nel calcolo fatto per la circonferenza; supponiamo infatti di avere una nuova parametrizzazione a velocità doppia

$$p(t) = (x_0, y_0) + R(\cos 2t, \sin 2t) \, .$$

Si ha

$$v(t) = 2R(-\sin 2t, \cos 2t) \ , \ \ v(t) = 2R\,, \ \ e \ \ T(t) = (-\sin 2t, \cos 2t)$$

da cui si ricava che per ogni t è

$$curvatura = \frac{|T'(t)|}{s(t)} = \frac{|2(-\cos 2t, -\sin 2t)|}{2R} = \frac{1}{R}$$

come già trovato.

Come calcolare la curvatura. La definizione data sopra esprime bene il senso geometrico della curvatura, ma la formula diventa rapidamente complicata da adoperarsi anche per curve semplici.
Diamo allora di seguito una formula più maneggevole per il calcolo della curvatura.

Criterio 6.38 *Sia C la curva definita dall'equazione parametrica*

$$p(t) = (x(t)\,, y(t))$$

Se il modulo della velocità $s(t) \neq 0$ allora:

$$curvatura = \frac{|x'(t)\ y''(t) - y'(t)\ x''(t)|}{\left(\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\right)^3}$$

o più succintamente

$$curvatura = \frac{|x'(t)\ y''(t) - y'(t)\ x''(t)|}{s(t)^3}$$

Questa formula può essere ricavata, partendo dalla definizione, con un calcolo diretto, ma lungo e tedioso, che omettiamo.

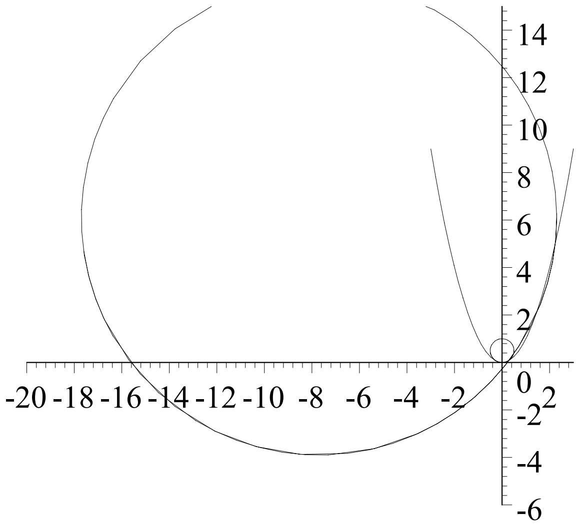
Esempio 6.39 *Trovare e discutere la curvatura della parabola $y = x^2$. Cosa accade per $x \to \infty$?*

Soluzione: Parametrizziamo la parabola nella forma (t, t^2). Si ha $x' = 1,\ x'' = 0,\ y' = 2t,\ y'' = 2$. Applicando la formula si ha

$$curvatura = \frac{2}{\left(\sqrt{1+4t^2}\right)^3}\ .$$

La curvatura ha il suo valore massimo 2 per $t = 0$, il raggio di curvatura vale $1/2$. Nel punto $(1, 1)$, al tempo $t = 1$, la curvatura vale $5\sqrt{5}/2$ e il raggio di curvatura vale $2/5\sqrt{5}$. ■

La figura sotto cerca di dare un idea di cosa significhi geometricamente il raggio di curvatura.



Raggi di curvatura in due punti di $y = x^2$

Nei due punti P si è tracciato una circonferenza con le seguenti caratteristiche: (i) la circonferenza è tangente alla curva in P; (ii) ha raggio uguale al raggio di curvatura della curva in P (il centro della circonferenza è sulla retta perpendicolare a C in P. Tale circonferenza è chiamata **cerchio osculatore** a C in P.

Per finire l'esempio, si vede che la curvatura tende a zero quando $t \to \infty$ e quindi il cerchio osculatore diventa sempre più grande quando $t \to \infty$.

6.7 Esercizi

1. Mostrare che la linea $\mathcal{L}$ passante per $(1,2)$ nella direzione di $(3,4)$ ha curvatura zero.

2. Sia C il grafico della funzione $y = f(x)$. Mostrare che in questo caso la curvatura di C in ogni punto $(x, f(x))$ ha la forma

$$curvatura = \frac{|f''(x)|}{\left(\sqrt{1 + f'(x)^2}\right)^3}$$

3. Spiegare geometricamente perché la parabola $y = x^2$ ha la stessa curvatura nei punti simmetrici $(-t, t^2)$ e (t, t^2). In che modo la formula della curvatura lo garantisce?

4. Usare *Maple* o altro software per disegnare il cerchio osculatore come nell'esempio dopo aver calcolato centro e raggio.

5. Trovare la curvatura di $y = x^3$ nel punto $(0,0)$. Spiegare la risposta geometricamente.

6. Trovare la curvatura di $y = x^3$ nel punto $(1,1)$. Usare la tecnologia per disegnare la curva e il cerchio osculatore.

7. Questi sono i passaggi che portano alla formula sulla curvatura a pagina 217. Sia data la curva C in forma parametrica $(x(t), y(t))$. Per trovare la curvatura K in un punto P supponiamo che il vettore tangente a C in P formi un angolo θ con l'asse delle x. Sia $l(t)$ la lunghezza d'arco di C misurata a partire da un punto P_0. Per definizione, la curvatura è il valore assoluto della derivata di θ fatta rispetto alla lunghezza d'arco l. Cioè

$$K = \left|\frac{d\theta}{dl}\right| .$$

Vediamo, passo per passo, come calcolare questa derivata.

(a) Per tutti i t per i quali $dl \,/\, dt \neq 0$ si ha:

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{d\theta/dt}{dl/dt}$$

Spiegare il perché.

(b) Spiegare perché $dl\,/\,dt = s\,(t) = \sqrt{x'\,(t)^2 + y'\,(t)^2}$.

(c) Se $x'\,(t) \neq 0$, allora

$$\tan\left(\theta\,(t)\right) = \frac{y'\,(t)}{x'\,(t)}$$

Spiegare perché vale questa relazione.

(d) Differenziare entrambi i membri dell'equazione precedente per mostrare che

$$\sec^2\left(\theta\,(t)\right)\frac{d\theta}{dt} = \frac{x'\,(t)\;y''\,(t) - y'\,(t)\;x''\,(t)}{x'\,(t)^2 + y'\,(t)^2}$$

(e) Usare l'equazione precedente per mostrare che

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x'\,(t)\;y''\,(t) - y'\,(t)\;x''\,(t)}{x'\,(t)^2 + y'\,(t)^2}$$

[**Sugg.:** $\sec^2\left(\theta\,(t)\right) = 1 + \tan^2\left(\theta\,(t)\right)$; e $\tan\left(\theta\,(t)\right) = y'\,(t)\,/x'\,(t)$.]

(f) Derivare infine la formula 6.38.