Capitolo 5

Applicazioni delle Derivate 1

5.1 La Regola dell'Hospital

Valutare limiti semplici del tipo

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{o} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

è semplice; basta guardare alla struttura delle funzioni sottoposte a limite, in questo caso alla grandezza relativa di numeratore e denominatore.

Altri tipi di limiti sono più difficilmente risolvibili, con il solo uso dell'intuizione, legata alla forma della funzione sottoposta a limite. Consideriamo per esempio,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2^x}\,; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}\,; \quad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}\,; \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{2x^2+3}\,.$$

Limiti di questa forma sono chiamati **forme indeterminate**. Essi sono "indeterminati" perché, in tutti i casi, si presentano due tendenze conflittuali. Nel primo limite, per esempio, entrambe le quantità divergono

$$x^2 \to +\infty \quad \text{e} \quad 2^x \to +\infty \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

Quindi, il numeratore tende a far crescere la frazione, mentre il denominatore tende a portarla verso zero. Si ha una situazione indeterminata del tipo ∞/∞. La vera domanda da porsi è: *con quanta rapidità il numeratore ed il denominatore crescono relativamente l'uno all'altro ?*

Il secondo limite è ambiguo per un'altra ragione, entrambi, il numeratore e denominatore tendono a zero, siamo di fronte ad una forma indeterminata del tipo $0/0$. Ancora una volta il problema l a"velocità relativa" con cui numeratore e denominatore tendono a zero. Il terzo limite coinvolge il prodotto $x \cdot e^{-x}$. I due fattori si comportano in modo opposto al crescere di $x \to \infty$,

$$x \to +\infty\,, \text{ma} \quad e^{-x} \to 0\,.$$

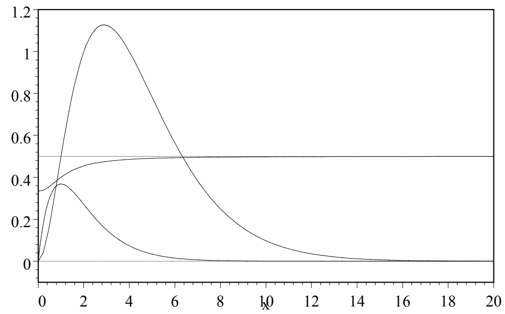
In questo caso siamo di fronte ad una forma indeterminata del tipo $0 \cdot \infty$. L'ultimo limite è ancora della forma ∞/∞.

Abbiamo già visto come trattare quest'ultimo limite, dividendo numeratore e denominatore per x^2 si ottiene

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{2x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{2+\dfrac{3}{x^2}}=\frac{1}{2}\,.$$

Siamo riusciti a calcolare semplicemente il limite per la sua semplice forma algebrica, ma con le altre forme indeterminate, l'algebra da sola non è sufficiente a farci arrivare al risultato.

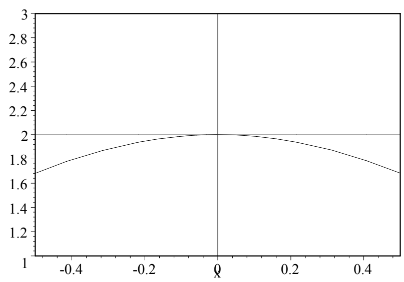
Da questo punto di vista, un approccio grafico, anche se meno preciso è più efficiente. Il seguente grafico ci suggerisce i risultati per i tre limiti per $x \to +\infty$



Comportamento all'infinito delle tre funzioni

$$\frac{x^2}{2^x}\to 0\,,\quad xe^{-x}\to 0\,,\quad \frac{x^2+1}{2x^2+3}\to\frac{1}{2}\,;$$

mentre per il limite per $x \to 0$ si ha



Comportamento intorno a zero

Se ne deduce che per $x \to 0$

$$\frac{\sin 2x}{x}\to 2\,.$$

L'approccio grafico, così come quello numerico ci possono aiutare a capire il comportamento di una funzione ed ad individuare in modo plausibile (ma non necessariamente esatto) il risultato del limite, come nei casi precedenti.

La regola dell'Hospital ci offre un altro approccio, più efficace e certo nel risultato, per affrontare le forme indeterminate. Con esso si possono trattare tutte e quattro le forme indeterminate discusse sopra e molte altre ancora.

5.1.1 Come Funziona la Regola. Primi Esempi Semplici

La regola dell'Hospital afferma che, *sotto condizioni appropriate*, una forma indeterminata può essere calcolate derivando, separatamente, numeratore e denominatore. In simboli

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,. \tag{5.1}$$

Vedremo più avanti quali siano le condizioni, per ora illustriamo il metodo con degli esempi.

Esempio 170 *Usando la regola dell'Hospital, mostrare che* $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\,.$

Soluzione. Usando l'equazione 5.1 si ottiene

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2\ \cos 2x}{1}\,.$$

Il secondo membro non è più indeterminato ed il suo valore è chiaramente 2.

Esempio 171 *Usando la regola dell'Hospital, determinare il* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2^x}\,.$

Soluzione. Assumendo che valga l'equazione 5.1 si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,x}{2^x\cdot\ln 2}\,.$$

Il secondo limite è *ancora* indeterminato della forma ∞/∞. Applichiamo ancora una volta l'equazione 5.1:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\,x}{2^x\cdot\ln 2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2^x\cdot\ln 2\cdot\ln 2}\,.$$

L'ultimo elemento delle uguaglianze non è più un limite indeterminato. Poiché il numeratore è costante mentre il denominatore cresce senza limitazioni, l'ultimo limite vale zero. Questo, allora, è anche il valore assunto dal limite di partenza. ■

Esempio 172 *Il grafico suggerisce (ma non dimostra !) che* $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$. *Verificare il risultato con l'equazione 5.1.*

Soluzione. Per poter applicare l'Hospital bisogna riscrivere l'espressione sotto forma di quoziente:

$$\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\,.$$

In questa forma è adesso possibile applicare l'equazione 5.1:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0\,,$$

così come ci aspettavamo. ■

L'uso della regola dell'Hospital richiede un minimo di attenzione. La tentazione di pensare di poter risolvere tutti i limiti con l?Hospital può portare a disastri. Per esempio

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+11}{x+1}=11\,,\qquad \text{ma}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{(x+11)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1}=1\,.$$

L'errore è dovuto al fatto che si è tentato di applicare la regola ad una situazione dove non era applicabile, perché il limite non era una forma indeterminata.

Sotto quali condizioni è possibile applicare la regola dell'Hospital ? Il seguente teorema fornisce la risposta.

Teorema 173 ***(Regola dell'Hospital)*** *Siano f e g due funzioni differenziabili. Supponiamo inoltre che:*

(a) per $x\to a$ si abbia: (i) o $f(x)\to 0$ e $g(x)\to 0$, oppure (ii) $f(x)\to\pm\infty$ e $g(x)\to\pm\infty$; inoltre

(b) $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *esista.*

Allora:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

NOTA:

Limiti all'infinito Il teorema ammette, come possibili valori del limite, anche $a=\pm\infty$. Sono ammessi anche limiti laterali (destro o sinistro).

Veramente Indeterminato L'ipotesi (a) garantisce che il $\lim f/g$ sia veramente una forma indeterminata del tipo $0/0$ o ∞/∞.

Esempio 174 *Trovare il* $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$.

Soluzione. Il teorema si applica ai quozienti. Riscriviamo perciò il limite dato nella forma

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\,.$$

Abbiamo adesso il limite scritto in una forma del tipo ∞/∞, le funzioni $\ln x$ e $1/x$ sono differenziabili, per cui si può applicare l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}-x=0\,.$$

Quindi il teorema vale ed il limite originario è 0. ■

5.1.2 Perché Funziona. Una Idea di Dimostrazione

Il teorema si occupa del comportamento, quando $x \to a$, del rapporto $f(x)/g(x)$. Se numeratore e denominatore tendono a zero o a infiniti, il limite, se esiste, dipende dalla "velocità relativa" con la quale f e g tendono ai loro limiti. Le derivate $f'(x)$e $g'(x)$ misurano questo rapporto.

Per capire quale è l'idea della dimostrazione,supponiamo che f e g siano funzioni differenziabili e che $f(a) = g(a) = 0$. Quando $x \approx a$, fe g sono vicine alle rispettive rette tangenti in $x = a$. In altre parole:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx f(a) + f'(a)(x-a) = f'(a)(x-a) \ ; \\ g(x) &\approx g(a) + g'(a)(x-a) = g'(a)(x-a) \ . \end{aligned}$$

Se $g'(a) \neq 0$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} \approx \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \, ,$$

quindi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \, .$$

Questo è ciò che ci dice la regola dell'Hospital nella sua forma più semplice. Una dimostrazione completa e rigorosa necessita di molta attenzione ai passaggi algebrici e logici, ma è essenzialmente basata sull'idea esposta.

5.1.3 Esercizi

Usare la regola dell'Hospital per valutare i seguenti esercizi

1. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$;
2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin 2x}$;
3. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2-2}$,
4. $\lim_{x\to 0} \dfrac{5x-\sin x}{x}$;
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 5x}{4x+3x^2}$,
6. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{x+x^5}$;
7. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$;
8. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^{2/3}}$.
9. $\lim_{x\to +\infty} e^{-x}\ln x$;
10. $\lim_{x\to 0} x\cot x$;
11. $\lim_{x\to 8} \dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$;
12. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x+\sqrt{x}}$;
13. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x-\sin x}$;
14. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$;
15. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\ln(1+x)}$;
16. $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$;

17. $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-x-e^{-x}}{1-\cos x}$;

18. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2-x}$;

19. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan 3x}{\sin 2x}$;

20. $\lim_{x\to 1} \dfrac{\cos^3(\pi x/2)}{\sin(\pi x)}$;

21. $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\right)$;

22. $\lim_{x\to +\infty} x\,(\pi/2 - \arctan x)$;

23. $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$;

24. $\lim_{x\to +\infty} e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$;

25. $\lim_{x\to +\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$.

26. Supponiamo sia $f(1) = 1$ e $f'(1) = 2$.Calcolare $\lim_{x\to 0} \dfrac{f^2(x) - 1}{x^2 - 1}$.

27. Supponiamo che f ed f' siano funzioni continue, che $f(0) = 0$, e che

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sin 2x} = 5\,.$$

Valutare $f'(0)$.

28. Supponiamo che sia $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -2$ e che $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$. Calcolare $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(1/x)}{g(1/x)}$.

5.2 Equazioni Differenziali

Le *equazioni algebriche* descrivono le relazioni tra varie quantità. Le *equazioni differenziali* fanno un passo in avanti - un passo da giganti - :esse descrivono le relazioni tra quantità che variano e le loro derivate. Solo risolvendo equazioni differenziali, possono essere descritti molti fenomeni della vita reale.

Una **equazione differenziale** (ED) è un'equazione che contiene una o più derivate di una funzione incognita.

Ecco alcuni esempi:

$$f'(x) = 6x + 5\,, \quad y' = y\,, \quad \frac{dy}{dx} = 2y + 3\,, \quad y'' - 3y' + 2y = 0\,.$$

Le prime tre equazioni sono dette del **primo ordine**, perché contengono al più la derivate prime della funzione, l''ultima è detta del **secondo ordine**. Risolvere la ED significa trovare la funzione incognita che soddisfa l'equazione. Una tale funzione è chiamata **soluzione** della ED.

Esempio 175 *Trovare una soluzione della ED $f'(x) = 6x + 5$. Quante sono le soluzioni? Come sono correlate l'una all'altra?*

Soluzione. La soluzione della ED, in questo caso semplice, richiede solo di trovare una primitiva f. Per ogni valore della costante C la soluzione è $f(x) = 3x^2 + 5x + C$. La ED ha quindi infinite soluzioni che differiscono tra loro per una costante additiva. ■

Esempio 176 *Risolvere la ED $y' = y$. Quante sono le soluzioni? Come sono correlate l'una all'altra?*

Soluzione. L'equazione differenziale ci dice che la funzione cercata ha derivata uguale alla funzione stessa. La funzione esponenziale, con base naturale, ha questa proprietà, quindi $y(x) = e^x$è una possibile soluzione. Infatti, sappiamo che $y'(x) = e^x$.

Ci sono altre soluzioni? Pensando all'esempio precedente potremmo provare con $y(x) = e^x + C$. In questo caso però le cose non funzionano, infatti $y'(x) = e^x \neq y(x)$.

Altre soluzioni, comunque esistono. Infatti, se consideriamo la funzione $y(x) = k\,e^x$ si ha che $y'(x) = k\,e^x = y(x)$.

Abbiamo ancora un'infinità di soluzioni, che differisco tra loro per una costante moltiplicativa. ■

5.2.1 Problemi al Valore Iniziale

Gli esempi precedenti rappresentano tipiche ED del primo ordine. Queste equazioni hanno generalmente una infinità di soluzioni, nelle quali i membri della famiglia differiscono tra loro per una costante additiva o moltiplicativa. Se ipotizziamo che la soluzione abbia un valore assegnato dell'uscita per un dato valore dell'ingresso, ci aspettiamo un'unica soluzione. Questa ulteriore condizione è chiamata **condizione iniziale,** e la combinazione della ED con la condizione iniziale è chiamato **problema al valore iniziale** (PVI).

Esempio 177 *Risolvere il PVI*

$$f'(x) = 6x + 5\,, \quad f(0) = 27\,.$$

Soluzione. Come abbiamo visto, ogni funzione della forma $f(x) = 3x^2 + 5x + C$ è una soluzione della ED. Con la condizione iniziale troviamo il valore di C :

$$f(0) = 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + C = C = 27\,.$$

Quindi, $f(x) = 3x^2 + 5x + 27$ è l'unica soluzione del PVI. ■

Esempio 178 *Risolvere il PVI*

$$y' = y\,, \quad y(0) = 27\,.$$

Soluzione. Abbiamo visto che la soluzione della ED è $y(x) = k\,e^x$. Anche in questo caso, per trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale imponiamo: $y(0) = 27$. Si ricava per k il valore 27. La funzione $y(x) = 27e^x$ è l'unica soluzione del PVI. ■

Data una ED e pensata una possibile soluzione, il lavoro di verifica è semplice, basta sostituire.

Esempio 179 *Consideriamo la ED $y' = k\,(y - T)$, dove k e T sono costanti. Dire se la funzione $y(t) = T + Ae^{kt}$ è una soluzione della ED. Cosa rappresenta la costante A?*

Soluzione. Per decidere se $y(t) = T + Ae^{kt}$ risolve la ED, basta derivare e sostituire. Si ha che

$$y'(t) = A\,k\,e^{kt}$$

Sostituendo le espressioni di y e di y nella ED si ha:

$$y'(t) = A\,k\,e^{kt} = k\,(y(t) - T) = k\left(T + Ae^{kt} - T\right) = A\,k\,e^{kt}\,.$$

I due membri sono uguali, quindi y è la soluzione.

Notiamo anche che y è una soluzione qualunque sia il valore di A. Se non si specifica una condizione iniziale non si può ottenere uno specifico valore per A. ■

L'equazione $y' = k\,(y - T)$ coinvolge i due parametri k e T. Essa rappresenta un tipico modello di problema di evoluzione. Una ED di questo tipo ci permette di dare soluzione a diversi esempi pratici.

Esempio 180 *Una caffè versato caldo in una tazza ha una temperatura di* $75\,°C$*. Raffreddandosi, obbedisce alla legge di Newton:*

`La variazione ditemperatura di un corpo è proprzionale alla differenza di temperatura tra il corpo e l'ambiente.`
Assumiamo che la temperatura dell'ambiente sia di $20\,°C$ *e che dopo* 2 *minuti il caffè sia raffreddato a* $40\,°C$*. Trovare una formula per la temperatura al tempo* t*.*

Soluzione. Se $y(t)$ rappresenta la temperatura al tempo t (espresso in minuti), la legge di Newton afferma che per qualche costante k si ha:

$$y' = k(y-20)\ ,\quad y(0)=75\,,\quad y(2)=40\,.$$

Come abbiamo visto nell'esempio precedente, la soluzione della ED ha la forma

$$y(t) = 20 + Ae^{kt}$$

per qualche costante A e k. Ciò che rimane da fare è trovare i valori delle costanti.

Dalla condizione $y(0)=75$ si ha

$$75 = y(0) = 20 + A\,e^{k\cdot 0} = 20 + A \quad\Longrightarrow A = 55$$

Inoltre, $y(2)=40$ implica che

$$40 = y(2) = 20 + 55e^{2k} \quad\Longrightarrow e^{2k} = \frac{20}{55}\,.$$

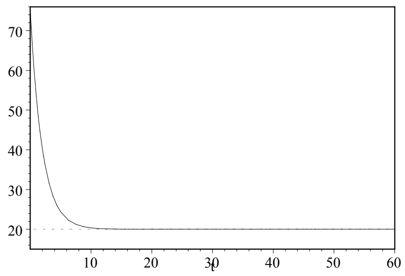
La soluzione di questa equazione è

$$k = \frac{1}{2}(\ln 20 - \ln 55) \approx -0.505\,.$$

Si ottiene quindi che la temperatura del caffè varia col tempo con la formula

$$y(t) = 20 + 55\,e^{-0.505\,t}\,.$$

Ha senso la soluzione trovata? Consideriamo il grafico di y su di un periodo di un'ora



Il raffreddamento del caffè

Come mostra il grafico, il caffè si raffredda rapidamente quando è più caldo, quindi più lentamente quando la sua temperatura si avvicina a quella ambiente. ■

L'abilità nel tradurre dal linguaggio della matematica a quello del linguaggio corrente, e viceversa, affermazioni che riguardano la variazione di quantità e derivate, è importante sia per capire cosa dicono le ED che per applicarle alla soluzione di problemi. la tavola seguente illustra alcune di queste traduzioni. In questa y rappresenta una funzione incognita $y(t)$ della variabile t; k indica una costante.

Se la variabile d'ingresso t indica il tempo, allora $y(t)$ rappresenta una quantità che varia col tempo, $y' = y'(t)$ ci dice quanto velocemente varia y (non è necessario che la variabile indichi necessariamente e il tempo, può indicare distanza, posizione o il valore di una qualche quantità fisica).

Traduzione tra l'italiano ed il linguaggio delle ED

ED	**Italiano**
$y' = 0$	La velocità di crescita di y è zero (y rimane costante)
$y' = 0.3y$	La velocità di crescita di y è proporzionale a y stesso (con costante 0.3)
$y' = kt$	La velocità di crescita di y al tempo t è proporzionale a t.
$y'' = k$	y ha derivata seconda costante (cioè accelerazione costante).
$y' = k(y - T)$	y varia con velocità proporzionale alla differenza tra y e T

5.2.2 Equazioni Differenziali: Modellare la Crescita

Crescita Esponenziale

Le funzioni esponenziali hanno una proprietà importante, che può essere espressa in termini di variazione:

Una funzione esponenziale cresce in modo proporzionale al proprio valore.

Grazie a questa proprietà, le funzioni esponenziali modellano molti fenomeni reali. Interpretiamo questa proprietà nel linguaggio delle Ed e dei PVI. Per ogni valore della costante A e k, sia $y(t) = Ae^{kt}$. Queste due proprietà di y sono importanti

$$y'(t) = A\,k\,e^{kt} = k\,y(t) \quad \text{e} \quad y(0) = Ae^0 = A\,.$$

In altre parole:

Teorema 181 *Per ogni valore delle costanti A e k, la funzione esponenziale risolve il PVI*

$$y' = k\,y\,; \quad y(0) = A\,.$$

Il teorema offre molte utili applicazioni. Semplicemente scegliendo in modo opportuno i valori delle costanti A e k, si possono risolvere un sorprendente numero di importanti ED.

Modellare Problemi con Crescita "con Interesse"

Molti fenomeni naturali crescono o decadono in modo esponenziale, con velocità proporzionali al loro valore. L'Indice dei Prezzi al Consumo, il valore di un deposito finanziario, il decadimento radioattivo, la variazione di popolazioni biologiche, possono tutte essere modellate, più o meno accuratamente, con il PVI del Teorema precedente.

Le equazioni differenziali legano le quantità che variano alla loro derivata, cioè alla loro variazione istantanea. I problemi pratici, d'altra parte, sono spesso legati ad altri tipi di variazione come ad esempio variazioni medie, variazioni percentuali, tassi d'interesse.

Esempio 182 *Al tempo* $t = 0$ *(espresso in anni) il deficit del bilancio statale è di* 1000 *Miliardi di Euro e continua a crescere. Gli economisti governativi (G) predicono:*
Nei prossimi anni, il deficit statale crescerà del 3% *l'anno.*
Gli economisti dei partiti di opposizione(O) affermano invece che il deficit di bilancio crescerà con una variazione istantanea del 3%.
Le due affermazioni sono in disaccordo tra loro? Quanto sarà la differenza nel giro di 10 anni?

Soluzione. Gli economisti sono d'accordo su una cosa: il deficit cresce in modo proporzionale al proprio valore. Nel linguaggio delle ED, se $y(t)$ rappresenta il valore del deficit al tempo t, espresso in miliardi di Euro, entrambi i gruppi degli economisti sono d'accordo che la ED che determina il deficit è

$$y'(t) = k\,y(t)\ .$$

Essi sono in disaccordo, tuttavia, sul valore da attribuire a k. G si riferiscono ad un incremento medio nell'anno: In un anno, il deficit sale del 3%. O affermano qualcosa di diverso: ad ogni istante, il deficit cresce del 3%.

Per capire la differenza e vederne gli effetti, scriviamo le predizioni degli economisti nei termini di un PVI.

O affermano che

$$y' = 0.03y\,; \quad y(0) = 1000\,.$$

G affermano qualcosa di diverso:

$$y' = k\,y\,; \quad y(t+1) = 1.03 \cdot y(t)\ ; \quad y(0) = 1000$$

Risolviamo entrambi i PVI. L'affermazione degli O ricade completamente nel teorema precedente. Poiché $y'(t) = 0.03y(t)$ e $y(0) = 1000$, ne segue che

$$y(t) = 1000e^{0.03\,t}\,.$$

Risolvere il PVI posto da G richiede un ulteriore passo.. Poiché $y'(t) = k\,y(t)$ e $y(0) = 1000$ ne segue che

$$y(t) = 1000\,e^{kt}\,.$$

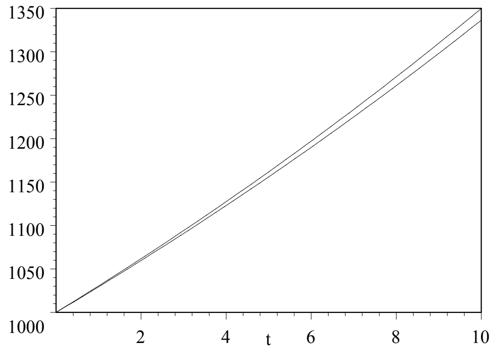
Bisogna trovare il valore di k. Per farlo bisogna usare la condizione $y(t+1) = 0.03 \cdot y(t)$. Ne segue che

$$\begin{aligned} y(t+1) &= 1.03 \cdot y(t) \implies 1000\, e^{k(t+1)} = 1.03 \cdot 1000\, e^{k\,t} \\ &\implies e^k = 1.03 \implies k = \ln 1.03 \approx 0.029 \end{aligned}$$

Quindi gli economisti G propongono un modello del tipo

$$1000\, e^{0.029\,t}.$$

Quale variazione implicano i due modelli nel giro di cinque anni? Proviamo a tracciare i due grafici sullo stesso sistema d'assi



Crescita del Deficit decondo G e O

Calcoliamo direttamente la differenza. Si ha $1000e^{0.3} - 1000e^{0.29} \approx 13.400$ Miliardi di Euro. ■

Soldi in Banca Gli interessi bancari servono come uno degli esempi più familiari di crescita proporzionale alla quantità. Infatti, il tasso di crescita del conto è proporzionale al valore del conto stesso.

Esempio 183 *Un conto bancario paga un interesse* ***nominale*** *annuo del* 6%, *contabilizzato quotidianamente. Modellare la situazione nel linguaggio delle ED. Di quanto cresce il capitale in un anno?*

Soluzione. Se $b(t)$ rappresenta il bilancio (in Euro) al tempo t (in anni), l'affermazione precedente significa che ogni giorno (in un anno di 365 giorni), il conto al tempo $t + 1/365$ è uguale a:

$$b\left(t + \frac{1}{365}\right) = b(t) \cdot \left(1 + \frac{0.06}{365}\right). \tag{5.2}$$

Indicando con $b(0)$ il valore iniziale, ecco cosa accade dopo due giorni:

$$b\left(\frac{1}{365}\right) = b(0) \cdot \left(1 + \frac{0.06}{365}\right) \; ; \; b\left(\frac{2}{365}\right) = b(0) \cdot \left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^2.$$

Nel giro di un anno il conto cresce del fattore

$$\left(1+\frac{0.06}{365}\right)^{365} \approx 1.0618\,.$$

Il tasso d'interesse annuo **effettivo** è quindi del 6.18%, nell'intervallo di un anno, il conto cresce di questa percentuale. ■

Notiamo quanto segue:

- Nella realtà il conto $b(t)$ varia in modo discreto, ad intervalli regolari. Ogni modello di ED, essendo continuo, commette qualche errore. In pratica questo errore è piccolo abbastanza da essere ignorato.

- Su una scala di tempo misurata in anni, un singolo giorno è effettivamente "un istante". Il tasso d'interesse nominale può quindi servire come coefficiente k del Teorema 181 . In altre parole, il valore del conto $b(t)$ può essere assunto, con un minimo errore, come quello descritto dalla ED

  $$b'(t) = 0.06\, b(t)\ .$$

  Il Teorema 181 risolve l'equazione differenziale posta. Se il valore iniziale del conto è b_0, si ha

  $$b'(t) = 0.06\, b(t) \quad \text{e} \quad \mathrm{b}(0) = b_0 \implies b(t) = b_0 \cdot e^{0.06\,t}.$$

  Dopo un anno il valore del conto è

  $$b(1) = b_0 \cdot e^{0.06} \approx b_0 \cdot 1.0618\,.$$

  Il conto cresce quindi del 6.18%, il tasso di crescita effettivo. ■

Nota 184 *la ED* $b'(t) = 0.06\, b(t)$ *fa un buon lavoro, ma non perfetto, nel modellare un interesse annuo del* 6%*, contabilizzato quotidianamente. Il modello sarebbe migliore se l'interesse venisse contabilizzato ogni ora o meglio ogni minuto. La ED rappresenta un modello in cui l'interesse viene contabilizzato continuamente, cioè nel caso limite in cui il numero di momenti in cui l'interesse viene contabilizzato, tende all'infinito. Come mai, quindi, il modello* $b'(t) = 0.06\, b(t)$ *approssima il caso della contabilizzazione quotidiana così bene? L'equazione5.2 ed il calcolo seguente lo spiegano. Il risultato mostra anche quanto la frequenza di contabilizzazione intervenga nella bontà dell'approssimazione.*

$$\begin{aligned} b'(t) &\approx \frac{b(t+1/365)-b(t)}{1/365} \\ &= \left(b(t)\cdot\left(1+\frac{0.06}{365}\right)-b(t)\right)\cdot 365 \\ &= b(t)\left(1+\frac{0.06}{365}-1\right)\cdot 365 \\ &= 0.06\cdot b(t)\ . \end{aligned}$$

Decadimento Radioattivo Un campione di Carbonio-14 (un isotopo radioattivo del normale carbone) decade al tempo t (in anni) con una rapidità che è proporzionale alla sua massa, con costante $k = -0.000121$. Nel linguaggio delle ED

$$m'(t) = -0.000121\, m(t)\ .$$

(La costante k è negativa perché la massa diminuisce).

Esempio 185 *Se un campione di Carbonio-14 ha una massa di m_0 chilogrammi nel 1991, quanto sarà la massa nel 2991? Quanto tempo occorre perché il campione perda metà della sua massa? (Questo periodo è chiamato* ***vita media*** *del campione).*

Soluzione. Se $m(t)$ rappresenta la massa del campione t anni dopo il 1991, allora $m(t)$ risolve il PVI

$$m'(t) = -0.000121\, m(t)\ , \quad m(0) = m_0\, .$$

In accordo al Teorema 181 si ha

$$m(t) = m_0\, e^{-0.000121\, t}$$

Ne segue che la massa nel 2991 sarà

$$m(1000) = m_0\, e^{-0.121} \approx 0.88603\, m_0\, .$$

Mentre il tempo $\tilde{t}$ che occorre perché la massa si dimezzi è dato da:

$$\begin{aligned} m_0/2 &= m_0 e^{-0.000121\tilde{t}} \implies e^{-0.000121\tilde{t}} = 1/2 \\ &\implies -0.000121\, \tilde{t} = \ln 1/2 \approx -0.69315 \\ &\implies \tilde{t} \approx 0.69315/0.000121 \approx 5728.5\, . \end{aligned}$$

La vita media del carbonio-14 è quindi di 5728.5 anni. ■

Alcune Popolazioni Biologiche Crescono Esponenzialmente Alcune popolazioni biologiche crescono esponenzialmente - almeno per un certo tempo. La popolazione della mosca della frutta, in condizioni di laboratorio per esempio,può crescere con un tasso di crescita del 5% al giorno, cioè un tasso di crescita proporzionale alla quantità di popolazione presente, con costante di proporzionalità $k = 0.05$. Nel linguaggio delle ED, se la popolazione $P(t)$ parte da un valore P_0, essa soddisfa la ED

$$P'(t) = 0.05\, P(t)\ , \quad P(0) = P_0\, .$$

(Notate l'analogia con i problemi sui tassi di interesse).

Esempio 186 *La popolazione della mosca della frutta, cresce con un tasso di crescita del 5% al giorno. Quanto tempo ci vuole perché la popolazione raddoppi?*

Soluzione. Avendo una popolazione P_0 al tempo $t = 0$, usando il Teorema 181 si ha

$$P(t) = P_0 e^{0.05\,t}.$$

ne segue che il tempo $\hat{t}$ in cui la popolazione raddoppia è dato da

$$\begin{aligned} 2P_0 &= P_0 e^{0.05\,\hat{t}} \\ &\Longrightarrow \quad 2 = e^{0.05\,\hat{t}} \quad \Longrightarrow \quad \hat{t} = (\ln 2)/0.05 \approx 13.863 \end{aligned}$$

■

Non Tutte Crescono Esponenzialmente: Crescita Logistica

Le popolazioni biologiche reali non possono crescere indefinitamente. Un numero iniziale di 8 mosche della frutta crescerebbero fino a diventare oltre 8 miliardi in un anno. In dieci anni sarebbero un numero superiore al numero di molecole sulla terra !

Ogni popolazione che inizialmente cresce in modo esponenziale, prima o poi si trova a fare i conti con i limiti (fisici e/o biologici) del proprio ambiente. Questa possibilità, applicata alla crescita della popolazione terrestre, preoccupò talmente un religioso del 19-esimo secolo Thomas Maltus, da fargli predire una fine spiacevole e prematura della razza umana. Indipendentemente dalla ragionevolezza o meno delle previsioni di Malthus, una crescita esponenziale di una popolazione porta alla saturazione dell'ambiente. Come le popolazioni reali si confrontino con questo problema (e con gli altri che incontrano) varia da popolazione a popolazione. Alcuni (come ad esempio le Granseole) hanno cicli di crescita e riduzione, altri fanno fuori il proprio ambiente e muoiono.

Una terza (e più felice) possibilità è quella della **crescita logistica**. Quanto più una popolazione si avvicina ad un limite superiore C (chiamato **capacità** dell'ambiente) tanto più lentamente essa cresce.

Come nel caso della crescita esponenziale la crescita logistica è caratterizzata dalla proprietà della propria variazione e determina quindi una ED (**ED logistica**):

> *Il tasso di crescita della popolazione è proporzionale sia alla popolazione stessa che alla differenza tra la capacità del sistema e la popolazione stessa.*

In simboli,

$$P' = k\,P\,(C - P)$$

dove P rappresenta la popolazione, P' la sua variazione, C la capacità dell'ambiente e k la costante di proporzionalità.

Studio Logistico della Crescita delle Mosche Una popolazione di mosche della frutta cresce nel seguente modo.

In un certo giorno la popolazione è di 1000 mosche con un tasso di crescita istantaneo di 50 mosche al giorno. L'ambiente può sopportare 10, 000 mosche.

Domande: Dato ciò che sappiamo sul tasso di crescita è naturale porsi le seguenti domande:

- Quanto sarà la popolazione dopo 10 giorni? E, dopo 100 giorni ? E 200 giorni ?
- Quando la popolazione conterà 5000, 9000, 9900 individui?
- Quando cresce più rapidamente la popolazione ? Quanto vale la popolazione a quel momento?

Soluzione della ED Logistica

Se una popolazione ha P_0 individui al tempo $t = 0$ e cresce logisticamente, il PVI impostato nei termini delle ED è dato da:

$$P' = k\,P\,(C - P)\ , \quad P\,(0) = P_0\,.$$

La soluzione di questa equazione, con gli strumenti a disposizione a questo livello, è non banale. Ci basta sapere che, per ogni valore delle costanti k, C, e d, la funzione

$$P\,(t) = \frac{C}{1 + de^{-kC\,t}}$$

risolve la ED logistica

$$P' = k\,P\,(C - P)\,.$$

Come sempre, la costante d dipende dalle condizioni iniziali.

Cosa significa la Soluzione per le Mosche

Per mettere tutto nel contesto definito, poniamo:

$$\begin{aligned} t &= \text{tempo, espresso in giorni, dal momento della misura iniziale}\,; \\ P\,(t) &= \text{popolazione delle mosche, in migliaia, al tempo } t\,; \\ P'\,(t) &= \text{tasso di crescita, in migliaia di mosche al giorno, al tempo } t\,. \end{aligned}$$

Valutazione dei Parametri. Sappiamo tre cose: $P\,(0) = 1,\ P'\,(0) = 0.05'$ e $C = 10$. Usiamo i dati noti per calcolare k e d. Poiché

$$P'\,(0) = 0.05 = k\,P\,(0)\,(10 - P\,(0)) = k \cdot 1 \cdot 9$$

ne segue che $k = 0.05/9 \approx 0.00556$.

Si può adesso calcolare d. Per ipotesi,

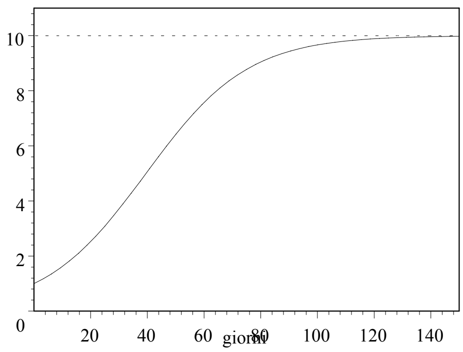
$$P\,(0) = 1 = \frac{10}{1 + d\,e^{-k\,C\,0}} = \frac{10}{1 + d}\,,$$

da cui segue che $d = 9$.

Mettendo tutto insieme abbiamo una formula esplicita per $P(t)$:

$$P(t) = \frac{10}{1 + d\,e^{-k\,C\,t}} = \frac{10}{1 + 9e^{-0.0556\,t}}\,.$$

Ecco il grafico di P



La popolazione delle mosche, in migliaia

Con la formula ed il grafico, possiamo rispondere, almeno approssimativamente, alle domande poste.

- Il grafico mostra che al giorno 100 la popolazione è di circa 9700; lo spazio sta rapidamente sparendo. Il giorno 200 non è mostrato, ma il grafico mostra che per $t = 200$ la popolazione è vicinissima alle $10,000$ unità. La formula è in accordo con questa osservazione

$$P(200) = \frac{10}{1 + 9e^{-0.0556\cdot 200}} \approx 9,99867\,.$$

  La popolazione, è quindi praticamente, già al suo massimo.

- Sia il grafico che la formula ci dicono che la popolazione raggiunge i 5000 individui in circa 40 giorni Intorno al giorno 80 la popolazione raggiunge quota 9000, il 90% della capacità. Intorno al giorno 130 si raggiunge il 99% della capacità.

- L'intuizione ci dice che sotto condizioni logistiche, la popolazione cresce lentamente all'inizio, poi più rapidamente ed infine la crescita rallenta verso il limite superiore. L'osservazione del grafico conferma l'intuizione. la popolazione cresce più rapidamente quando il grafico è più ripido, nell'intorno del giorno 40.
  Possiamo sostanziare l'intuizione ricordante che il massimo di P' implica (in questa situazione) uno zero per la derivata seconda. Da $P' = kP(C - P)$ si ottiene

$$\begin{aligned} P'' &= k\,C\,P' - 2k\,P\,P' \\ &= (kC - 2kP)\,P' \end{aligned}$$

  Dove P' è massimo P'' è zero, cioè $kC - 2kP = 0$, il che implica $P = C/2$, come il grafico indicava.

Osservazione

Tutti i modelli matematici più o meno semplificano i fenomeni che descrivono. L'uso delle ED e dei PVI per la modellizzazione di problemi di crescita, non fa eccezione a questa regola.

Un senso in cui le ED e i PVI descrivono in senso imperfetto la realtà è legato alla differenza tra fenomeni di cambiamento continui e discreti. La popolazione umana, per esempio, cresce in modo discreto, in salti di almeno una unità. Il caffè caldo in una stanza fredda, per contrasto, raffredda con continuità, la sua temperatura assume tutti i possibili valori tra quello iniziale e quello finale.

ED e PVI sono modelli continui di crescita. Le loro soluzioni sono funzioni continue, quindi non possono descrivere esattamente fenomeni discreti (né per lo stesso motivo, modelli discreti possono descrivere fenomeni continui): Questi problemi filosofici, per quanto veri, non inficiano i risultati dei modelli che usiamo. La differenza tra modello di crescita discreto e continuo è spesso trascurabile, specialmente se i "salti" sono piccoli. Importa poco, per esempio, se il caffè raffredda con continuità o con salti di $0.001\,^{\circ}C$.

Sebbene la perfezione non sia raggiungibile, le Ed ed i PVI che vengono usati per modellare i fenomeni di crescita - anche le crescite di tipo discreto -, le modellano in modo facile, efficiente ed accurato.

5.2.3 Esercizi

1. Usare il Teorema 181 a pagina 255 per risolvere i seguenti PVI. Controllare i risultati per differenziazione.

   (a) $y' = 0.1y\,, \quad y\,(0) = 100\,;$

   (b) $y\prime = -0.0001y\,, \quad y\,(0) = 1\,;$

   (c) $y' = \ln 2 \cdot y\,, \quad y\,(2) = 4\,;$

   (d) $y' = k\,y\,, \quad y\,(10) = 2y\,(0)$ [**Sugg.:** Risolvere per k usando le condizioni iniziali.]

2. Supponiamo che la mosca della frutta,descritta nell'esempio logistico, cresca ad un tasso di 100 mosche al giorno (invece che 50). Come cambierebbe la situazione? In modo più specifico, rispondere alle seguenti domande e confrontate i risultati con quelli precedenti.

   (a) Qual'è il numero di mosche dopo 10 giorni? E dopo 100 giorni?

   (b) Quando la popolazione sarà di 5000 mosche? 9000 ? 9900 ?

   (c) Quando la popolazione cresce più rapidamente? Quanto vale la popolazione ?

3. La Banca A pubblicizza l'8% di interesse, contabilizzato continuamente; la Banca B pubblicizza un interesse del 10% contabilizzato continuamente, ma carica un costo di 50 Euro per costi amministrativi (per semplicità si assuma che i 50 Euro siano dedotti con continuità durante l'anno). Indichiamo con $P\,(t)$ il valore in Euro del deposito dopo t anni.

   (a) Spiegare perché la politica della banca A può essere rappresentata della ED
   $$P' = 0.08P\,.$$

   (b) Spiegare perché la politica della banca B può essere rappresentata della ED
   $$P' = 0.1\,P - 50$$

   (c) Se si depositano 1000 Euro nella Banca A, quanto si possiederà dopo 10 anni?

   (d) Risolvere il PVI
   $$P' = 0.1P - 100\,.$$
   [**Sugg.:** La ED può essere riscritta come la legge di Newton del raffreddamento]

   (e) Se si depositano 1000 Euro nella Banca B, quanto si possiederà dopo 10 anni?

4. Una cultura cresce ad un tasso proporzionale alla quantità presente. Inizialmente pesa $2\,g.$, dopo 2 giorni pesa $5\,g$. Quanto pesa dopo dieci giorni?

5. Una cultura batterica è posta in una larga bottiglia di vetro. Supponiamo che il volume della cultura raddoppi ogni ora e la bottiglia sia piena dopo un giorno.

   (a) Se la cultura è stata messa nella bottiglia per $t = 0$, dopo quanto tempo la bottiglia è mezza piena?

   (b) Per quanto tempo la bottiglia sarà piena per meno dell' 1% ?

6. Supponiamo di leggere le note di un biologo che dicono: *La cultura cresce con un tasso proporzionale al suo peso.* Il peso della cultura alle ore 5.30 è di $10\,g.$, alle 6.15 è di $12g.$ A che ora il peso della cultura è di $13\,g.$?

7. Del petrolio è pompato con continuità da un pozzo con una velocità proporzionale alla quantità di petrolio rimasta nel pozzo. Inizialmente il pozzo conteneva $1,000,000$ di barili di petrolio. Dopo 6 anni ne conteneva $500,000$.

   (a) Con quale velocità decresceva la quantità di petrolio quando nel pozzo rimanevano $600,000$ barili di petrolio?

   (b) Non sarà più rimunerativo pompare petrolio dal pozzo quando ne rimarranno meno di $50,000$ barili. Quando si dovrà fermare la pompa?

8. Frammenti di scheletro umano sono portati in laboratorio per la loro datazione. L'analisi mostra che la proporzione di ^{14}C è solo del 6.25% rispetto a quello dei tessuti viventi. Quanto tempo fa è morta la persona?

9. Un serbatoio contiene inizialmente 400 litri di acqua e 5 chili di sale completamente mischiati. Viene aggiunta acqua pura alla velocità di 20 litri al minuto, mentre la mistura viene ridotta della stessa quantità (assumiamo un mixing istantaneo e completo).

   (a) Spiegare perché $S(t)$, la quantità di sale nel serbatoio al tempo t, è la soluzione del PVI
   $$S' = -\frac{1}{20}S\,; \quad S(0) = 5\,;$$

   (b) Usare il Teorema 181 a pagina 255 per trovare una soluzione di questo PVI;

   (c) Quanto sale rimane nel serbatoio dopo un'ora?

5.3 Approssimazione Lineare e Quadratica; Polinomi di Taylor

In questo paragrafo cerchiamo di capire come trovare ed usare i polinomi per approssimare altre (non polinomiali) funzioni. Cosa significa che una funzione f approssima una funzione g? Come possiamo scegliere una "buona" approssimazione?

Iniziamo con i casi più semplici, polinomi lineari e quadratici, dopodiché descriveremo come trovare polinomi di grado qualsiasi, chiamati **Polinomi di Taylor**, che approssimano una data funzione.

5.3.1 Retta Tangente e Approssimazione Lineare

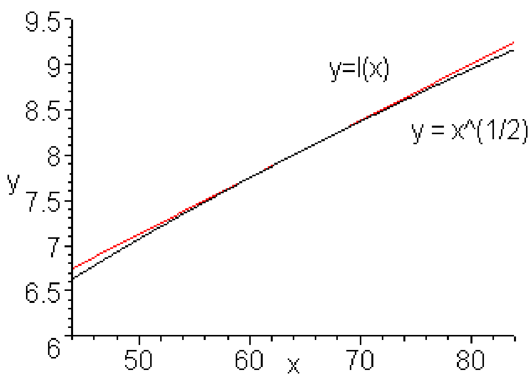
La retta tangente al grafico di una funzione f nel punti $x = x_0$ può essere interpretata da diversi punti di vista. Geometricamente, la retta tangente rappresenta la retta che meglio "approssima" il grafico di f nel punto x_0. Analiticamente, la retta tangente rappresenta la funzione lineare che meglio approssima f nell'intorno di $x = x_0$.

Esempio 187 *Sia* $f(x) = \sqrt{x}$*,e* $x_0 = 64$*. Consideriamo la funzione lineare* $l(x)$ *tangente ad* f *in* x_0*. Dire come* $l(x)$ *approssima i valori di* $f(x)$ *per valori di* x *nell'intorno di* 64?

Soluzione. Poiché $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$, $f'(x) = 1/16$. Quindi la retta tangente al grafico di f nel punto $(64, 8)$ ha equazione:

$$l(x) = f(64) + f'(64)(x - 64) = 8 + \frac{x - 64}{16} = 4 + \frac{x}{16}.$$

Consideriamo i grafici di f e di l in un intorno di $x_0 = 64$.



La retta tangente a $\sqrt{x}$ in $x = 64$

Osserviamo:

- La retta tangente "segue" il grafico di f molto da vicino, l dovrebbe quindi approssimare f abbastanza bene per x nell'intorno di $x_0 = 64$. Più è vicino migliore è l'approssimazione.

- Il grafico di f è concavo, quindi giace sotto la retta tangente. Quindi, la funzione retta tangente *sovrastima* f per ogni $x \neq 64$. ■

Approssimazioni Costanti, Lineari e Quadratiche

Come possiamo approssimare una qualsiasi funzione f nell'intorno di un punto assegnato $x = x_0$. L'Esempio precedente ha mostrato che la retta tangente in $x = x_0$ definisce una buona **approssimazione lineare** di f in x_0. Sono anche possibili **approssimazioni quadratiche** e **costanti.**

Esempio 188 *Quale funzione costante approssima meglio $f(x) = \sqrt{x}$. Quale approssimazione quadratica?*

Soluzione. Poiché $f(64) = 8$, la funzione costante $(x) = 8$ è l'unica scelta sensata; c ha il valore giusto per $x = 64$.

Come scegliere una buona approssimazione quadratica? Per l'approssimazione lineare l abbiamo richiesto che

$$l(64) = f(64) = 8 \ \text{ e } \ l'(64) = f'(64) = 1/16\,.$$

E' ragionevole allora supporre che l'approssimazione quadratica q faccia un passo in avanti e richieda:

$$q(64) = q(64) = 8\,, \ \ q'(64) = f'(64) = 1/16\,, \ \text{ e } \ q''(64) = f''(64) = -\frac{1}{2048}\,. \tag{5.3}$$

In altre parole, la funzione quadratica desiderata q deve essere in accordo con la funzione f sia per quanto riguarda il valore che le prime due derivate.

Il modo più semplice per costruire q è scriverla nella forma:

$$q(x) = a + b(x-64) + c(x-64)^2\ ,$$

e scegliere quindi i coefficienti a, b e c in modo appropriato. Valutiamo subito i valori di q e delle sue derivate in $x = 64$.

$$\begin{aligned} q(x) &= a + b(x-64) + c(x-64)^2 \implies q(64) = a\,; \\ q'(x) &= b + 2c(x-64) \implies q'(64) = b\,; \\ q''(x) &= 2c \implies q''(64) = 2\,c\,. \end{aligned}$$

La scelta di a, b e di c è ora ovvia:

Scelta di a. L'equazione 5.3 richiede che $q(64) = 8$. Ma $q(64) = a$, quindi $a = 8$.

Scelta di b. L'equazione 5.3 richiede che $q'(64) = 1/16$. Ma $q'(64) = b$, quindi $b = 1/16$.

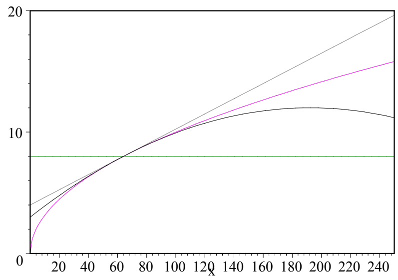
Scelta di c. L'equazione 5.3 richiede che $q''(64) = -1/2048$. Ma $q'(64) = 2c$, quindi $c = -1/4096$.

Rimettendo tutto insieme si ha che:

$$q(x) = 8 + \frac{x-64}{16} - \frac{(x-64)^2}{4096}$$

è la miglior approssimazione quadratiche di f in $x = 64$.

I grafici di f, c, l e q mostrano cosa accade



Grafici di f, c, l e q

Osservare i seguenti fatti:

- Tutte e tre le funzioni approssimanti (c, f e q) hanno il valore giusto in $x = 64$.
- I grafici di l e di q (ma non quello di c) sono tangenti al grafico di f (cioè hanno la stessa tangente) in $x = 64$.
- La funzione q approssima f meglio di l in un intorno di $x = 64$. Il fatto che $q''(64) = f''(64)$ significa che f e q hanno la stessa concavità in $x = 64$.

Dal punto di vista numerico quanto c, l e q approssimano f?

Tre approssimazioni di $f(x) = \sqrt{x}$

x	50	63	63.9	64	64.1	65	80
$c(x)$	8.00000	8.00000	8.00000	8	8.00000	8.00000	8.00000
$l(x)$	7.12500	7.93750	7.99375	8	8.00625	8.06250	9.00000
$q(x)$	7.07715	7.93726	7.99375	8	8.00625	8.06226	8.93750
$f(x)$	7.07107	7.93725	7.99375	8	8.00625	8.06226	8.94427

I numeri confermano l'impressione dei grafici: q approssima f meglio, specialmente intorno a $x = 64$. ■

5.3.2 Definizioni

Approssimazioni lineari e quadratiche possono essere trovate per ogni funzione sufficientemente regolare, in ogni punto base x_0. La definizione racconta, in forma generale, ciò che è stato fatto per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$.

Definizione 189 *Sia f una funzione per la quale esistono $f'(x_0)$ e $f''(x_0)$ L'approssimazione lineare di f, centrata in x_0, è la funzione lineare*

$$l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

L'approssimazione quadratica di f, centrata in x_0, è la funzione quadratica

$$q(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 .$$

Esempio 190 *Sia $f(x) = 10^x$ Trovare l e q, l'approssimazione lineare e quadratica di f, centrata in $x = 3$. Usarli poi per valutare $f(3.1)$.*

Soluzione. Abbiamo bisogno di conoscere il valore di f e delle due prime derivate per $x = 3$. Si ha $f(x) = 10^x$, $f'(x) = 10^x \ln 10$ e $f''(x) = 10^x (\ln 10)^2$, quindi

$$\begin{aligned} f(3) &= 10^3 = 1000\,; \\ f'(3) &= 1000 \ln 10 \approx 2302.5851\,; \\ f''(3) &= 1000 (\ln 10)^2 \approx 5301.8981\,. \end{aligned}$$

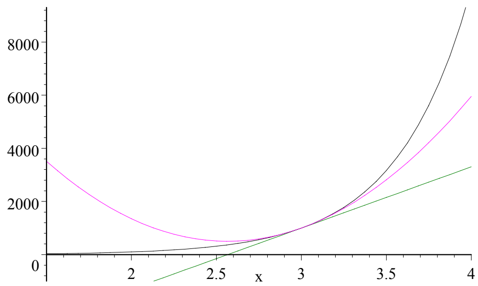
Dalla definizione ricaviamo che:
$l(x) = f(3) + f'(3)(x - 3) \approx 1000 + 2302.585(x - 3)$;

$q(x) = f(3) + f'(3)(x - 3) + \frac{f''(3)}{2}(x - 3) \approx 1000 + 2302.585(x - 3) + 2650.949(x - 3)^2$

Il calcolo numerico mostra che:

$$l(3.1) \approx 1230.2585\,; \quad q(3.1) \approx 1256.7680\,; \quad f(3.1) \approx 1258.9254\,.$$

I grafici seguenti confermano che q approssima f meglio di l.



Approssimazione lineare e quadratica di 10^x

Il disegno mostra perché l approssima f non bene: f si allontana rapidamente da l anche per x vicino a 3. La derivata seconda ci spiega il perché: Ogni funzione lineare ha derivata seconda zero. La funzione obbiettivo, per contro, ha una derivata seconda molto grande, $f''(3) \approx 5000$. Si vede che f è drasticamente nonlineare e non può essere ben approssimato da una funzione lineare.

5.3.3 Polinomi di Taylor

Abbiamo appena visto come approssimare una funzione con polinomi di primo e secondo grado. Possiamo pensare di migliorare l'approssimazione scegliendo polinomi di grado maggiore a due.

Cominciamo ad affrontare il problema con un esempio.

Esempio 191 *Trovare un polinomio di quinto grado* p_5 *che approssima* $f(x) = e^x$. *Un polinomio, cioè, tale che*

$$\begin{array}{lll} p_5(0) = f(0)\ ; & p_5'(0) = f'(0)\ ; & p_5''(0) = f''(0)\ ; \\ p_5^{(3)}(0) = f^{(3)}(0)\ ; & p_5^{(4)}(0) = f^{(4)}(0)\ ; & p_5^{(5)}(0) = f^{(5)}(0)\ . \end{array}$$

Soluzione. Dobbiamo calcolare il valore di f e le sue prime cinque derivate per $x = 0$.

Poiché si ha $f(x) = e^x = f'(x) = \cdots = f^{(5)}(x)$ ne segue che

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(5)}(0) = 1\,.$$

Noi vogliamo che il polinomio p_5 abbia le stesse derivate in $x = 0$. Per cominciare, scriviamo $p_5(x)$ nella sua forma standard:

$$p_5(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$$

dove i coefficienti sono ancora da determinare.

Trovare i coefficienti $a_0, a_1, \cdots a_5$ è facile. L'idea chiave è che gli a_i sono strettamente correlati ai valori delle derivate in $x = 0$.

$$\begin{array}{rclcrcl} p_5(x) & = & a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 & \Longrightarrow & p_5(0) & = & a_0 \\ p_5'(x) & = & a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 & \Longrightarrow & p_5'(x) & = & a_1 \\ p_5''(x) & = & 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 & \Longrightarrow & p_5''(0) & = & 2a_2 \\ p_5^{(3)}(x) & = & 3\cdot 2a_3 + 4\cdot 3\cdot 2a_4x + 5\cdot 4\cdot 3a_5x^2 & \Longrightarrow & p_5^{(3)}(0) & = & 6a_3 \\ p_5^{(4)}(x) & = & 4\cdot 3\cdot 2a_4 + 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5x & \Longrightarrow & p_5^{(4)}(0) & = & 24a_4 \\ p_5^{(5)}(x) & = & 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2a_5 & \Longrightarrow & p_5^{(5)}(0) & = & 120a_5 \end{array}$$

Il modo in cui si costruiscono i coefficienti dovrebbe essere chiaro a questo punto.

Per ogni indice k si ha $p_5^{(k)}(0) = k!\,a_k$, in termini espliciti:

$$\begin{array}{lll} a_0 = p_5(0)\ ; & a_1 = p_5(0)\ ; & a_2 = \dfrac{p_5''(0)}{2!} \\ a_3 = \dfrac{p_5^{(3)}(0)}{3!}\ ; & a_4 = \dfrac{p_5^{(4)}(0)}{4!}\ ; & a_5 = \dfrac{p_5^{(5)}(0)}{4!}\ . \end{array}$$

Poiché si ha

$$\begin{array}{rcl} p_5(0) & = & f(0) = 1\,,\ p_5'(0) = f'(0) = 1\,,\ p_5''(0) = f''(0) = 1 \\ p_5^{(3)}(0) & = & f^{(3)}(0) = 1\,,\ p_5^{(4)}(0) = f^{(4)}(0) = 1\,,\ p_5^{(5)}(0) = f^{(5)}(0) = 1 \end{array}$$

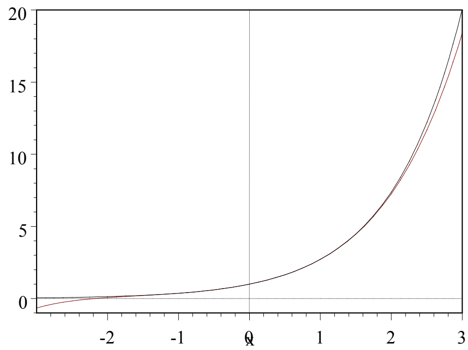
ne segue che

$$a_0 = 1\,; \quad a_1 = 1\,; \quad a_2 = \frac{1}{2!}\,;$$
$$a_3 = \frac{1}{3!}\,; \quad a_4 = \frac{1}{4!}\,; \quad a_5 = \frac{1}{5!}\,.$$

Il polinomio $p_5(x)$ è dato, infine, da:

$$p_5(x) = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\,.$$

Qual'è il grado di approssimazione di f con p_5? Vediamone i grafici



e^x e il polinomio approssimante p_5

I grafici di f e di p_5 sono praticamente identici nell'intorno di $x = 0$. Confrontiamo per esempio $f(1)$ e $p_5(1)$. Si ha

$$\begin{aligned} p_5(1) &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} \approx 2.717\,; \\ f(1) &= e = 2.718\,. \end{aligned}$$

5.3.4 Definizione Formale

Il polinomio p_5 appena costruito è il polinomio dell'approssimazione di Taylor al quinto ordine di $f(x) = e^x$, centrato in $x = 0$.

Ecco la definizione generale:

Definizione 192 *(Polinomi di Taylor) Sia f una funzione che ammette derivate fino all'ordine n nel punto $x = x_0$. Il polinomio di Taylor di ordine n, centrato in x_0, è definita da*

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k\,. \end{aligned}$$

Esempio 193 *Sia* $f(x) = \sqrt{x}$ *. Trovare i primi tre polinomi di Taylor* $p_1,\ p_2,\ p_3$, *tutti con centro in* $x = 64$.

Soluzione. Ciò di cui abbiamo bisogno è il valore delle prime tre derivate di $\sqrt{x}$ in $x = 64$. Si ha

$$f(64) = 8\,; \qquad f'(64) = \frac{1}{16}\,;$$
$$f''(64) = -\frac{1}{2048} \qquad f'''(64) = \frac{3}{262144}\,.$$

Sostituendo questi valori nella formula generale, data dalla definizione, si ha:

$$p_1(x) = 8 + \frac{x-64}{16}\,;$$
$$p_2(x) = 8 + \frac{x-64}{16} - \frac{(x-64)^2}{2!\cdot 2048} = 8 + \frac{x-64}{16} - \frac{(x-64)^2}{4096}\,;$$
$$p_3(x) = 8 + \frac{x-64}{16} - \frac{(x-64)^2}{2!\cdot 2048} + \frac{3\cdot(x-64)^3}{3!\cdot 262144}$$
$$= 8 + \frac{x-64}{16} - \frac{(x-64)^2}{4096} + \frac{3\cdot(x-64)^3}{3!\cdot 262144}\,.$$

■

Nota 1. I polinomi di Taylor centrati in $x = 0$ sono conosciuti come **polinomi di MacLaurin**. Essi appaiono più semplici dei polinomi di Taylor

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k\,.$$

Nota 2. Sia f una funzione e P_n il polinomio di Taylor di ordine n, centrato in x_0. Il polinomio di Taylor successivo P_{n+1} non è altro che il polinomio P_n con l'aggiunta del termine $\dfrac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, si ha cioè

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}\,.$$

Approssimare Funzioni con i Polinomi di Taylor

I polinomi di Taylor sono utili per approssimare funzioni più complicate. Per esempio, la funzione seno, che non ammette una espressione algebrica, è un buon candidato per l'approssimazione di Taylor.

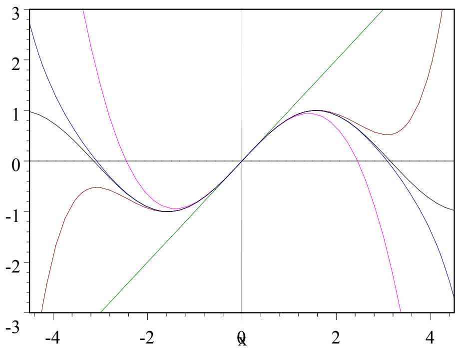
Esempio 194 *Trovare* P_1, P_3, P_5 *e* P_7, *i polinomi di Taylor (MacLaurin) di* $f(x) = \sin x$ *di centro* $x = 0$. *Disegnare il tutto sullo stesso sistema d'assi. Di quanto, ogni polinomio approssimante, approssimano* $\sin 1$?

Soluzione. Per trovare P_7 dobbiamo trovare il valore e le prime sette derivate di $f(x) = \sin x$ in $x = 0$. In ordine, essi sono $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1$. Ne segue

$$P_1(x) = x\,; \qquad P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}\,;$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\,; \qquad P_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}\,.$$

Ecco i cinque grafici:



I grafici di $\sin x$ e di P_1, P_3, P_5, P_7

L'intuizione suggerisce che P_1, P_3, P_5 e P_7 dovrebbero dare delle stime migliori per $\sin 1 \approx 0.84167$. Infatti è così:

$$P(1) = 1\,; \qquad P_3(1) = \frac{5}{6} \approx 0.83333\,;$$

$$P_5(1) = \frac{101}{120} \approx 0.84167\,; \qquad P_7(1) = \frac{4214}{5040} \approx 0.84147\,.$$

■

Valutazione dell'Errore

Quanto è grande l'errore che si commette quando si sostituisce il valore di f con quello del polinomio approssimante di Taylor? Ci limiteremo a riportare la formula della valutazione dell'errore senza dimostrazione.

Ricordiamo solo che l'errore che si commette dipende da

1. la distanza di x da x_0;
2. dall'ordine del polinomio approssimante.

Il seguente teorema stabilisce da un punto di vista quantitativo le osservazioni fatte sopra.

Teorema 195 *Sia f una funzione $n+1$ differenziabile su di un intervallo centrato in x_0. Sia P_n sia il polinomio approssimante di f di grado n. Supponiamo che*

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq K \quad \textit{per ogni } x \in I\,.$$

Si ha allora che

$$E_n(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{K}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Osserviamo:

La funzione errore. La funzione $E_n(x)$ è chiamata **funzione dell'errore**. Per un dato $x \in I$ il valore di $E_n(x)$ ci dice che l'errore che si commette approssimando f con P_n non è maggiore del numero $E_n(x)$.

Esempio 196 *Abbiamo mostrato che* $p_2(x) = 8 + \frac{x-64}{16} - \frac{(x-64)^2}{4096}$ *è l'approssimazione del secondo ordine della funzione* $f(x) = \sqrt{x}$ *nell'intorno del punto* $x_0 = 64$. *Quale accuratezza garantisce la formula dell'errore se* p_2 *approssima* f *nell'intervallo* $[50, 80]$ *e nell'intervallo* $[63, 65]$ *?*

Soluzione. Consideriamo l'approssimazione nell'intervallo $[50, 80]$. La formula dell'errore ci dice che

$$E_2(x) \leq \frac{K}{(2+1)!}(x-64)^3$$

essendo

$$K \geq \left|f^{(3)}(x)\right| \quad \text{per } x \in [50, 80] \, .$$

Calcoliamo la derivata terza di f,

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}\frac{1}{x^{5/2}} \, .$$

Si capisce immediatamente che la derivata terza diminuisce al crescere di x, per cui

$$K = f^{(3)}(50) = \frac{3}{8}\frac{1}{50^{5/2}} \approx 2.12 \cdot 10^{-5} \geq f^{(3)}(x) \quad \forall x \in [50, 80] \, .$$

Inoltre $80 - 64 = 16$, mentre $64 - 50 = 14$, quindi l'errore massimo è

$$E_2(x) \leq \frac{2.12 \cdot 10^{-5}}{3!}(80-64)^3 \approx 1.45 \cdot 10^{-2} \, , \; \forall x \in [50, 80] \, .$$

Mentre, nel caso dell'intervallo $[63, 65]$ si ha

$$K = f^{(3)}(63) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{63^{5/2}} \approx 1.2 \cdot 10^{-5} \, ,$$

e quindi

$$E_2(x) \leq \frac{2.12 \cdot 10^{-5}}{3!} \approx 3.54 \cdot 10^{-6} \, .$$

In altre parole, nell'intervallo $[63, 65]$ il polinomio p_2 approssima f con un errore sulla sesta cifra decimale. ■

Dimostrazione. (**Dimostrazione della Formula dell'Errore**) Siano f, P_n e K come sopra. Costruiamo la funzione errore e e la funzione di valutazione dell'errore b, come segue

$$e(x) = f(x) - P_n(x) \ ; \quad b(x) = K\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \, .$$

Il teorema afferma che per ogni $x \in I$, $|e(x)| \leq b(x)$. Per semplificare le cose dimostriamo solo che $|e(x)| \leq b(x)$ per $x \geq x_0$.

Abbiamo le tre seguenti proprietà di e e di b.

$$\begin{aligned} e(x_0) &= 0 = b(x_0) \ , \ e'(x_0) = 0 = b'(x_0) \ , \cdots , e^{(n)}(x_0) = 0 = b^{(n)}(x_0) \\ \left| e^{(n+1)}(x) \right| &\leq K = b^{(n+1)}(x) \ . \end{aligned}$$

Tutte le proprietà di e seguono dalla costruzione di P_n; le proprietà di b si verificano per calcolo diretto.

Per terminare la dimostrazione, usiamo il principio delle corse.

Ricordiamo cosa dice il principio per ogni funzione g ed h:

Se $g(x_0) = h(x_0)$ e $g'(x_0) \leq h'(x_0)$ per $x \geq x_0$, allora $g(x) \leq h(x)$ per $x \geq x_0$.

Applichiamo adesso il principio delle corse ripetutamente, a partire da $e^{(n)}$ e $b^{(n)}$.

Si ottiene che $e^{(n)}(x_0) = 0 = b^{(n)}(x_0)$ e $e^{(n+1)}(x) \leq b^{(n+1)}(x)$ implicano $e^{(n)}(x) \leq b^{(n)}(x)$ per ogni $x \geq x_0$.

Proseguendo a ritroso, da $e^{(n-1)}(x_0) = 0 = b^{(n-1)}(x_0)$ e $e^{(n)}(x) \leq b^{(n)}(x)$ si ottiene $e^{(n-1)}(x) \leq b^{(n-1)}(x)$ per ogni $x \geq x_0$ e così via. SI arriva, infine, alla condizione:

$$e(x_0) = 0 = b(x_0) \quad \text{e} \quad e'(x) \leq b'(x) \quad \text{per ogni } x \geq x_0 \, ,$$

da cui segue

$$e(x) \leq b(x) \quad \text{per ogni } x \geq x_0 \, .$$

Ciò è quanto volevamo dimostrare. ■

5.3.5 Esercizi

1. Per ognuna delle funzioni f seguenti, trovare il polinomio di Taylor P_n di ordine n centrato nel punto x_0. Disegnare sia f che P_n sullo stesso sistema d'assi. Scegliere in modo appropriato la finestra per mostrare chiaramente la relazione tra f e P_n.

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $n = 3$, $x_0 = 0$;
   (b) $f(x) = \sin x + \cos x$, $n = 4$, $x_0 = 0$;
   (c) $f(x) = \ln x$, $n = 3$, $x_0 = 1$;
   (d) $f(x) = \tan x$, $n = 2$, $x_0 = 0$;
   (e) $f(x) = \sqrt{x}$, $n = 3$, $x_0 = 4$;

2. Trovare l'approssimazione lineare e quadratica di ogni funzione, in $x = 0$. Trovare poi un intervallo sul quale ogni polinomio approssimante fa un errore non superiore a 0.01

   (a) $f(x) = \sin x$;
   (b) $f(x) = \cos x$;
   (c) $f(x) = \tan x$;
   (d) $f(x) = e^x$;
   (e) $f(x) = \arctan^{-1} x$;
   (f) $f(x) = \arcsin^{-1} x$.

3. La retta tangente alla curva $y = g(x)$ nel punto $(3, 5)$ interseca l'asse delle y nel punto $(0, 0)$.

   (a) Quanto vale $g'(3)$;
   (b) Stimare $g(2.95)$ usando l'approssimazione lineare.

4. Sia $\mathrm{f}(x) = \cos x$.

   (a) Trovare i polinomi di Taylor P_2, P_4, P_6, centrati in $x = 0$. Disegnare sullo stesso sistema d'assi $\cos x$, P_2, P_4, P_6.
   (b) Calcolare l'errore massimo commesso sostituendo a $\cos x$ i vari polinomi, nell'intervallo $[-1, 1,]$

5. Sia f una funzione tale che $f'(x) = \sin\left(x^2\right)$ e $f(1) = 0$.

   (a) Stimare il valore di $f(0.5)$ usando l'approssimazione lineare.
   (b) La stima trovata è maggiore o minore del valore di $f(0.5)$? Perché ?
   (c) Stimare il valore di $f(0.5)$ usando l'approssimazione quadratica.

6. Supponiamo che h sia una funzione regolare tale che $h(2) = 3$, $h'(2) = -2$, e $-2 \leq h''(x) \leq 1$ per $x \in (0, 4)$

(a) Trovare l'approssimazione lineare per h;

(b) Mostrare che $0 \leq h(3) \leq 2$.

7. Al tempo $t = 0$ secondi una macchina passa per un punto di riferimento, diretta verso est a $25\, m/\sec$, con accelerazione verso est di $2\, m/\sec$. Sia $p(t)$ la posizione, in metri ad est del riferimento, della macchina, al tempo t secondi. (In particolare $p(0) = 0$)

   (a) Trovare l'approssimazione lineare $l(t)$ di $p(t)$ centrata in $t = 0$. Usare questa per predire dove la macchina sarà per $t = 1$, e dove era la macchina per $t = -1$.

   (b) Trovare l'approssimazione quadratica $q(t)$ di $p(t)$ centrata in $t = 0$. Usare questa per predire dove la macchina sarà per $t = 1$, e dove era la macchina per $t = -1$.

   (c) Sia $v(t)$ la velocità verso est della macchina, espressa in metri al secondo. Trovare l'approssimazione lineare l_v a v centrata in $t = 0$. Cosa predice al tempo $t = 1$?

   (d) Il motore della macchina e i suoi freni sono tali da produrre un'accelerazione compresa tra -3 a 3 metri per secondo quadrato. Usare questo fatto per decidere l'errore massimo che l'approssimazione lineare l_v può commettere, nell'intervallo $0 \leq t \leq 1$.

8. Ripetere l'esercizio precedente, assumendo che per $t = 0$ la macchina si stia dirigendo ad est con velocità di $25\, m/\sec$, e con accelerazione verso est di $-2\, m/\sec$.

9. Al tempo $t = 0$ secondi un oggetto viene fatto cadere da un' altezza di $100\, m$. La sua accelerazione verso il basso è di $9.8\, m/\sec$. Sia $h(t)$ l'altezza (in metri) al tempo t, dell'oggetto sul livello del suolo (in metri).

   (a) Trovare l'approssimazione lineare l di h, centrata in $t = 0$,. Cosa predice per $t = 1$?

   (b) Trovare l'approssimazione quadratica q di h, centrata in $t = 0$,. Cosa predice per $t = 1$?

   (c) Disegnare l e q sullo stesso sistema d'assi, nell'intervallo $0 \leq t \leq 6$. Quale dei due modelli sembra essere più realistico? Esprimono entrambi una situazione reale, o no?

10. Sia $f(x) = \ln x$.

   (a) Trovare l'approssimazione quadratica q di f centrata in $x = 1$.

   (b) Determinare l'errore massimo commesso approssimando f con q nell'intervallo $[1/2, 3/2]$.

   (c) Disegnare i grafici di f e q sullo stesso sistema d'assi, nell'intervallo $[1/2, 3/2]$. I grafici sono consistenti con quanto determinato in (b)?

11. Stimare il valore di ognuno delle seguenti espressioni usando l'approssimazione quadratica. Calcolare quindi la differenza tra la stima trovata ed il valore trovato con una calcolatrice.

    (a) $\sqrt{103}$;
    (b) $\sqrt[3]{29}$;
    (c) $\tan 31^{\circ}$;
    (d) 0.8^{10}.

12. Sia f una funzione e l e q le approssimazioni lineari e quadratiche di f centrate in x_0. Questo esercizio riguarda le due funzioni E_1 ed E_2 definite da:

$$E_1(x) = f(x) - l(x) \quad \text{e} \quad E_2(x) = f(x) - q(x) \ .$$

    Notare che E_1 ed E_2 misurano la differenza tra $f(x)$ e $l(x)$ o $q(x)$, cioè l'errore commesso approssimando f con l o q.

    (a) Sia $f(x) = e^x$ Trovare le formule per le funzioni $l,\ q,\ E_1$ e E_2 (Centro in $x = 0$)
    (b) Disegnare $f,\ l$ e q sullo stesso sistema d'assi, nell'intervallo $[-1, 1]$. In che modo il disegno mostra che q è un'approssimazione migliore di l?
    (c) Disegnare E_1 e sullo stesso sistema d'assi, nell'intervallo $[-1, 1]$. In che modo il disegno mostra che E_2 è un'approssimazione migliore di E_1?
    (d) I due grafici precedenti dovrebbero rappresentare una quadratica e una cubica, rispettivamente. E' così? Quale rappresenta quale?
    (e) Le curve in (d) sono davvero quadriche e cubiche o solo gli assomigliano?

13. Ripetere l'esercizio precedente con $f(x) = \ln x$ con centro $x = 1$.

14. Ripetere l'Esercizio 12 con $f(x) = x^5$, centrato in $x = 1$.

15. Sia $f(x) = e^x$. Calcolare P_5 con centro in $x = 0$, e l'errore massimo che si commette usando P_5 al posto di f nell'intervallo $[0, 1]$.

16. Sia $f(x) = \arctan x$. Calcolare P_3 con centro in $x = 0$, e l'errore massimo che si commette usando P_3 al posto di f nell'intervallo $[0, 1]$.

17. Sia $f(x) = \sqrt{1 + x}$. Calcolare P_4 con centro in $x = 0$, e l'errore massimo che si commette usando P_4 al posto di f nell'intervallo $[0, 1]$.

18. Sia $f(x) = \ln(1 + x)$. Calcolare P_5 con centro in $x = 0$, e l'errore massimo che si commette usando P_5 al posto di f nell'intervallo $[0, 1]$.

5.4 Ottimizzazione

5.4.1 Ottimizzazione e Derivate

Ottimizzazione è una parola che indica il problema generale di trovare i valori massimi e minimi delle funzioni. A questo punto del corso è ormai chiaro che la derivata è uno strumento utile per l'Ottimizzazione: ovunque f' sia zero, si ha un naturale candidato per un massimo o un minimo. Diversi problemi possono comunque presentarsi. Come sappiamo, una radice di f' può rappresentare un massimo, un minimo o altro. Un massimo, poi, potrebbe essere locale o globale.

Per riuscire a capire le situazioni, rimetteremo insieme e sintetizzeremo il linguaggio, le tecniche e alcune delle sottigliezze presenti nei problemi di Ottimizzazione.

Punti Stazionari e Punti Critici. Sia f una funzione e f' la sua derivata. Come abbiamo visto f cresce quando $f' > 0$ e decresce quando $f' < 0$. Ne segue che ogni punto x_0 nel quale f' cambia segno, è naturalmente da osservare con interesse.

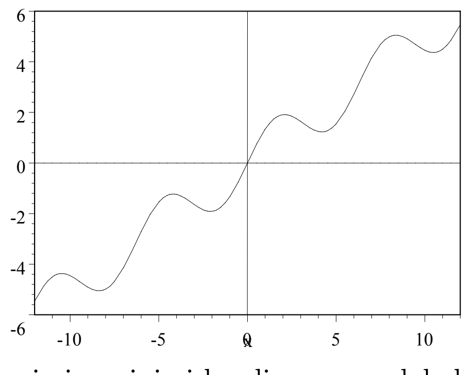
Senza entrare nella patologia delle funzioni, f' cambia segno in x_0 solo in due modi:

$$f'(x_0) = 0 \text{ \textit{oppure} } f'(x_0) \text{ \textit{non esiste}}$$

Se vale la prima condizione, x_0 è un **punto stazionario** di f. Se vale una qualsiasi delle due condizioni, diremo che x_0 è un **punto critico** di f.

Esempio 197 *La funzione* $f(x) = |x|$ *non ha punti stazionari, perché* $f'(x)$ *non si annulla mai. Il punto critico* $x_0 = 0$ *(dove non esiste la derivata) è un minimo locale di* f*.*

Estremi Locali e Estremi Globali. I massimi e minimi di una funzione possono essere o meno globali. Per esempio, la funzione $f(x) = x/2 + \sin x$ ha molti massimi e minimi su $(-\infty, \infty)$, ma nessuno di essi è globale. La funzione f è illimitata superiormente ed inferiormente su $(-\infty, \infty)$. Il grafico è in accordo con queste affermazioni



Massimi e minimi locali ma non globali.

Quali Funzioni Hanno Minimo e Massimo Globale. Funzioni Continue su Intervalli Chiusi. Come abbiamo appena visto che $f(x) = x/2 + \sin x$ su $(-\infty, +\infty)$, una funzione può non avere né massimo né minimo su di un dato intervallo. Il **teorema dei valori estremi** (o Teorema di Weierstrass) garantisce che una funzione continua f su un intervallo chiuso $[a, b]$ deve necessariamente assumere il suo valore massimo ed il suo valore minimo. Osservando il grafico precedente, si osserva che la funzione $f(x) = x/2 + \sin x$ ha questa proprietà nell'intervallo $[-12, 12]$. In questo caso la funzione assume il suo massimo ed il suo minimo (che valgono circa ± 5.5) negli estremi dell'intervallo, $x = \pm 12$.

Trovare Massimi e Minimi di f su $[a, b]$. Se f è continua su un intervallo chiuso $[a, b]$, allora devono esistere il massimo ed il minimo globale su $[a, b]$. La seguente affermazione è la chiave per trovarli.

Affermazione 198 *Una funzione continua su un intervallo chiuso f , può assumere il suo valore massimo e minimo solo nei punti critici in (a, b) o agli estremi.*

L'affermazione dice che gli unici possibili candidati ad essere massimi e minimi assoluti di f sono (1) gli estremi a e b, (2) le radici di f', (3) i punti nei quali f' non esiste.

Esempio 199 *Trovare il massimo e minimo assoluto di $f(x) = x/2 + \sin x$ nell'intervallo $[0, 3]$.*

Soluzione. Cominciamo trovando i punti critici. Poiché f' esiste ovunque, è sufficiente trovare i punti stazionari di f .

$$f'(x) = 1/2 + \cos x = 0 \iff \cos x = -1/2 .$$

L'unico punto con questa proprietà, nell'intervallo $[0, 3]$ è $x = 2\pi/3$. Seguendo l'affermazione precedente, i massimi e minimi assoluti di f nell'intervallo $[0, 3]$ possono occorrere solo nei punti $0,\ 3,\ 2\pi/3$. Tutto ciò che rimane da fare è calcolare i valori della funzione in questi tre punti:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0; \\ f\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1.9132; \\ f(3) &= \frac{3}{2} + \sin 3 \approx 1.6411. \end{aligned}$$

La conclusione è adesso chiara: f assume il suo valore minimo, 0, in $x = 0$ ed il suo valore massimo in $x = 2\pi/3$. ■

Massimi e Minimi su Intervalli Qualsiasi. L'affermazione precedente si applica solo agli intervalli limitatai e chiusi. Su di un intervallo arbitrario, f può avere o meno massimo e minimo assoluto. In pratica, tuttavia, è chiaro dal contesto o dal grafico se i valori estremi esistono o meno e come trovarle. I punti critici, ancora una volta, sono la chiave.

Esempio 200 *Quale, tra i punti della retta $y = -2x + 2$ è il più vicino all'origine ?*

Soluzione. Per risolvere il problema definiamo la funzione d, distanza dei punti della retta $(x, -2x + 2)$ dall'origine, nel seguente modo

$$d(x) = \sqrt{x^2 + (-2x + 2)^2} = \sqrt{5x^2 - 8x + 4}$$

E' ovvio che questa funzione ha un unico minimo locale, che è anche minimo globale. Per trovarlo cerchiamo i punti stazionari della funzione d

$$d'(x) = \frac{10x - 8}{\sqrt{5x^2 - 8x + 4}} = 0 \iff 10x - 8 = 0 \iff x = \frac{4}{5}.$$

Allora, il punto della retta che realizza la minima distanza dall'origine è $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$; la minima distanza è $\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Invece di minimizzare la distanza si poteva minimizzare il quadrato della distanza. Questo approccio, eliminando la radice quadrata, semplifica i conti. ■

Funzioni Obiettivo, Equazioni di Vincolo e Derivate Implicite

Molti problemi di ottimizzazione hanno la stessa formulazione generale. Un pò di nomenclatura aiuta a comprendere.

Funzione Obbiettivo: Descrive la quantità che si vuole ottimizzare. Nell'esempio precedente, per esempio, la funzione obbiettivo è la distanza dall'origine, che come sappiamo ha la forma $d(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ (così come scritta qui, la distanza dipende da due variabili x ed y). nell'esempio abbiamo riscritto la funzione obbiettivo usando la sola variabile x.

Equazione del Vincolo: Descrive una condizione che deve essere soddisfatta dalla variabile del problema di ottimizzazione. Nell'esempio precedente abbiamo richiesto (cioè vincolato) il punto (x, y) a stare sulla retta $y = -2x+2$; questa è l'equazione del vincolo, o semplicemente il **vincolo.**

Problema di Ottimizzazione Vincolata: Ogni problema di ottimizzazione che (come l'esempio precedente) coinvolge la massimizzazione o la minimizzazione di qualche funzione obbiettivo soggetto ad una o più equazioni di vincolo.

Vediamo un altro esempio di applicazione

Esempio 201 *La somma di due numeri non negativi è* 10*. Quanto può essere grande il prodotto?*

Soluzione. Siano x ed y i due numeri. La nostra **funzione obbiettivo** è $P(x, y) = x \cdot y$. Poiché siamo interessati solo a quei numeri tali che $x + y = 10$, questa è la l'**equazione del vincolo.** Ne segue, per esempio, che x è compreso tra 0 e 10, ma per questi due valori di x il prodotto P vale zero; ne segue che P deve essere maggiore di zero per qualche valore di x compreso tra gli estremi.

Per risolvere il problema potremmo esplicitare l'equazione del vincolo $x+y = 10$ rispetto ad y, sostituire il valore trovato nella funzione obbiettivo P che diventa una funzione di una sola variabile.

Invece, differenziamo sia la funzione obbiettivo che l'equazione di vincolo

$$P = x \cdot y\,, \quad x + y = 10$$

implicitamente rispetto ad x (considerando cioè y come una funzione implicita in x). Si ottiene:

$$\frac{dP}{dx} = x\frac{dy}{dx} + y\,, \quad 1 + \frac{dy}{dx} = 0\,.$$

In un punto critico deve essere $\dfrac{dP}{dx} = 0$. Questo fatto, insieme all'equazione del vincolo, ci fornisce un sistema di tre equazioni

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0\,; \quad 1 + \frac{dy}{dx} = 0\,; \quad x + y = 10\,.$$

Sostituendo la seconda equazione nella prima si ha

$$\frac{dy}{dx} = -1 \implies 0 = -x + y \implies x = y\,.$$

Allora, la funzione obbiettivo ha il suo valore massimo quando i due fattori x e y sono uguali. Poiché $x + y = 10$, ne segue che $x = y = 5$ e quindi $P = 25$. ■

La risposta non è sorprendente, così come non lo è la risposta al seguente problema.

Esempio 202 *Due numeri non negativi hanno come prodotto* 25*. Quanto vale il minimo della loro somma?*

Soluzione. La nuova funzione obbiettivo e l'equazione del vincolo sono, rispettivamente:

$$S = x + y\,; \quad \text{e} \quad x \cdot y = 25\,.$$

Differenziando entrambe queste equazioni implicitamente rispetto ad x e ponendo $dS/dx = 0$ otteniamo il seguente (ovvio) risultato

$$\frac{dS}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} = 0\,; \quad y + x\frac{dy}{dx} = 0\,.$$

Ne segue, ripetendo il procedimento dell'esempio precedente che si ha un punto critico quando $x = y$. Ne segue, come prima, che $x = y = 5$ nel punto critico, quindi $S = 10$ è il minimo. ■

La Lattina Migliore

Il prossimo esempio ha che fare con il disegno della tipica lattina da $335\,ml$ per soft-drink.

Esempio 203 *Una tipica lattina da soft-drink ha un volume di* $335\,ml$. *Trovare l'altezza* h *ed il raggio* r *che minimizzano la superficie della lattina.*

Soluzione. Calcoleremo la soluzione usando entrambi i metodi; prima usando le derivate ordinarie, poi le derivate implicite.

Soluzione 1 : Il volume V e la superficie S della lattina sono date da

$$V = 355 = \pi r^2 h\,; \quad S = 2\pi rh + 2\pi r^2\,.$$

Dalla prima equazione si ha, $h = 355/\left(\pi r^2\right)$, quindi

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r \cdot \frac{355}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{710}{r} + 2\pi r^2\,.$$

Derivando si ha

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= -\frac{710}{r^2} + 4\pi r = 0 \implies 710 = 4\pi r^2 \\ &\implies r = \left(\frac{710}{4\pi}\right)^{1/3} \approx 3.837\,. \end{aligned}$$

E' facile vedere, calcolando la derivata seconda, che A ha un minimo locale per $r \approx 3.837\,cm$. Quindi le dimensioni ottimali della lattina sono date da $r \approx 3.837\,cm$ e da $h = 355/\left(\pi r^2\right) \approx 7.67\,cm = 2r$. In particolare , la lattina ottimale ha un profilo quadrato.

Soluzione 2 Partiamo con le stesse equazioni: $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$ e $V = 355 = \pi r^2 h$ Differenziando implicitamente entrambe le funzioni rispetto ad r, si ha

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dr} &= 2\pi h + 2\pi r\frac{dh}{dr} + 4\pi r\,; \\ \frac{dV}{dr} &= 2\pi rh + \pi r^2\frac{dh}{dr} = 0 \implies \frac{dh}{dr} = -\frac{2h}{r}\,. \end{aligned}$$

Sostituiamo adesso l'ultimo risultato nell'espressione di dA/dr e semplifichiamo:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi h + 2\pi r\left(-\frac{2h}{r}\right) + 4\pi r = 0 \implies h = 2r\,.$$

Quindi, il profilo ottimale è quello quadrato. ■

Esempio 204 *Quali sono le dimensioni reali di una lattina reale? Sono quelle "giuste" ?*

Soluzione. Se si misura una lattina reale le dimensioni sono $h \approx 12.5\,cm$. e $r \approx 3.1\,cm$. Questi numeri corrispondono bene ai numeri calcolati sopra. Essi sono un pò più grandi poiché le lattine devono lasciare un pò di spazio vuoto. Inoltre, gli estremi della lattina sono tre volte più spesse che ai lati. ■

5.4.2 Esercizi

1. Quale punto della retta $y = -2x + 2$ è il più vicino a $(0, 1)$?

2. Un triangolo ha un lato sull'asse x e l'altro sull'asse y, mentre la sua ipotenusa passa per il punto $(2, 1)$. Quale triangolo ha area minima?

3. Trovare il punto P sulla parte destra della parabola $y = 1 - x^2$ che ha minima distanza dall'origine.

4. Rifare l'esercizio precedente usando la parabola $y = 1/4 - x^2$. Qual'è la differenza tra questo esercizio ed il precedente?

5. Supponiamo che un proiettile lasci l'origine con velocità iniziale v_0 con direzione $y = mx$ influenzato solo dalla gravità. La traiettoria soddisfa l'equazione

$$y = mx - \frac{g}{2v_0^2}\left(1 + m^2\right)x^2 ,$$

   dove g è l'accelerazione di gravità.

   (a) Supponiamo che $v_0 = 30\, m/\sec.$ ed $m = 1$. Qual'è l'altezza massima raggiunta dal proiettile? Dove atterra?

   (b) Supponiamo che $v_0 = 45\, m/\sec.$ ed $m = 1/2$. Qual'è l'altezza massima raggiunta dal proiettile? Dove atterra?

6. Un contadino progetta di delimitare un pezzo di terra rettangolare, spendendo il meno possibile. Supponiamo che la rete di recinzione costi $3000\, L.$ al metro.

   (a) Se il contadino dispone di 100.000 lire per questo progetto qual'è la massima area che può essere recintata?

   (b) Supponiamo che vengano recintati $10\, m^2$, qual'è il minor costo possibile?

   (c) Discutere la relazione tra le due parti sopra.

7. In ognuna delle parti sotto un contadino vuole costruire una recinzione rettangolare spendendo il meno possibile. Assumiamo che la recinzione costi h Lire al metro per i lati paralleli all'asse x e v Lire al metro per i lati paralleli all'asse y

   (a) Supponiamo che per il progetto sia disponibile un budget di b Lire. Quanta area può essere recintata?

   (b) Supponiamo sia recintata un'area di a metri quadrati. Qual'è il minimo costo possibile?

8. Un rettangolo ha la sua base sull'asse x , un vertice sull'asse y e l'altro sulla curva $y = e^{-x^2}$.

(a) Quale scelta di vertici da l'area massima?

(b) Mostrare che uno dei vertici trovati in (a) è un punto di flesso per la curva.

9. Una lattina deve essere costruita per contenere un volume assegnato V. Non ci sono residui di lavorazione nel costruire la superficie laterale, ma i due fondi circolari sono ritagliati da quadrati di alto $2r$. Trovare il rapporto tra l'altezza h ed il raggio r che realizza la lattina più economica.

10. Un pezzo di filo di $100\,cm$ è tagliato in pezzi per costruire lo scheletro di una scatola a base quadrata.

11. Quale sono le dimensioni della scatola di volume massimo?

12. Quale sono le dimensioni della scatola di massima superficie?

13. Federal Express limita le dimensioni dei pacchi che possono essere spediti. La dimensione più lunga più il perimetro della sezione perpendicolare ala dimensione più lunga non può superare i $3\,m$.

    (a) Quale cubo spedibile ha volume massimo?

    (b) Dato un pacco rettangolare a base quadrata, trovare le dimensioni del pacco spedibile col massimo volume [**Sugg.:** Considerare due casi, a secondo del lato più lungo].

    (c) Tra i pacchi cilindrici spedibili, quale ha massimo volume?

    (d) Dare un esempio di pacco spedibile con volume maggiore di un pacco non spedibile.

14. Sono le 22.30 . La tua fuoristrada è rimasta senza benzina in un campo, e tu sei $3\,km$ a sud della strada più vicina. La stazione di servizio più vicina è sulla strada, $6\,km$ ad est , e chiude a mezzanotte. Tu puoi camminare a $4\,km/h$ sulla strada, ma solo a $3\,km/h$ camminando nei campi. Cela fai ad arrivare alla stazione prima della sua chiusura? Qual'è il cammino migliore?

15. La profondità dell'acqua del fiume Stico x chilometri a sud della città di Fanta è data dalla formula $P(x) = 20x + 10$ (metri), la larghezza del fiume è data da $L(x) = 10\left(x^2 - 8x + 22\right)$ (metri). Per creare il lago artificiale Sogno bisogna costruire una diga a sud di Fanta. Per ragioni ambientali la diga non può essere più alta di 130 (metri).

    (a) Per quali valori di x si ha $0 \leq P(x) \leq 130$?

    (b) Quanto, a sud di Fanta, può essere costruita la diga sul fiume Stico? Se la diga viene costruita in questo punto, quanto sarebbe larga? e quanto alta?

    (c) Quali sono le dimensioni della più grande diga che può essere costruita?

(d) Quale sono le dimensioni della diga più piccola che può essere costruita?

(e) Se il costo della diga è proporzionale alla sua superficie, dove va costruita la diga più economica?

16. Un camion, viaggiando a velocità costante di $80\,km/h$ in piano, ha un rendimento di $2\,km/litro$. Il gasolio costa $1800\,L/litro$. Il camion perde un decimo di chilometro al litro in rendimento di carburante per ogni chilometro all'ora di aumento di velocità. L'autista è pagato $70.000L$. l'ora. I costi fissi del camion sono di $20.000\,L$. l'ora. Viene pianificato un viaggio di $300\,km$. Quale velocità minimizza i costi?

5.5 Il Calcolo ed i Soldi: Derivate in Economia

La Matematica è stata applicata alla finanza da molto tempo. Un problema Babilonese vecchio di 3000 anni (citato in *Storia della Matematica* di Carl Boyer) recita come segue:

Dieci fratelli ricevono 1.40 minas di argento, e fratello dopo fratello ricevono una differenza costante. Se l'ottavo fratello riceve 6 shekels, quanto ha ricevuto ognuno dei fratelli?

(Una *mina* vale 60 shekels. I babilonesi usano un sistema numerico a base 60, quindi la notazione *1.40 significa 1 mina più 40 shekels, quindi 100 shekels*).

L'Economia è piena di "tassi". I tassi d'interesse, le tasse, il tasso d'inflazione, il tasso di disoccupazione e così via. La maggior parte di questi tassi possono essere letti come derivate. Quindi, molti problemi in economia implicano l'uso delle derivate.

Per applicare le tecniche dell'analisi abbiamo bisogno di funzioni con le quali lavorare. L'Economia ne offre in quantità:

$C(t)$ = costo orario medio della manodopera in Italia al tempo t;

$D(t)$ = numero medio di disoccupati in Italia al tempo t;

$DP(t)$ = Debito Pubblico Italiano al tempo t;

$C(p)$ = Costo al grossista di p casse di pomodori;

$P(p)$ = Prezzo per cassa di pomodori in funzione del numero di casse che possono essere vendute.

Le prime tre di queste funzioni variano col tempo, quindi le loro derivate misurano la variazione nel tempo. Così $D'(2000.9) = -50.000$ significa che nel settembre 2000 il numero dei disoccupati diminuisce con una variazione di 50.000 persone l'anno.

Le funzioni C e P sono diverse. Nel loro caso la variabile indipendente rappresenta una quantità (il numero di casse di pomodori). Quindi, per esempio $C'(200) = -3000$ significa che alla quantità di 200 casse, il costo delle casse di pomodori al grossista diminuisce di 3000 lire a cassa.

5.5.1 Fenomeni Discreti e Fenomeni Continui

Da un punto di vista tecnico, le funzioni costo e prezzo C e P sono definite per valori interi dell'ingresso q. una variabile che assume solo valori isolati (per es. gli interi) è chiamata **variabile discreta.** Sebbene molti problemi di finanza coinvolgano variabili discrete (giorni, mesi, anni), è un dato comune approssimarli con funzioni di variabile continua per poter usare gli strumenti dell'analisi.

Prima di continuare, ricordiamo ancora che la modellizzazione matematica coinvolge tre momenti:

1. *Descrivere* il fenomeno in termini matematici, usando funzioni ed altri ingredienti matematici;

2. *Dedurre* conseguenze matematiche dal modello;

3. *Interpretare* i risultati matematici in termini del fenomeno studiato.

Vediamo alcuni esempi di applicazioni economiche.

Esempio 205 *Giovanni Rossi un esperto grossista di granaglie, si pone il problema di quanti sacchi di grano comprare e vendere alla borsa merci di Milano. Egli sa che il prezzo* P *in Euro che può ottenere dal grano da lui posseduto dipende dalla quantità che vuole vendere. Troppo grano sul mercato fa scendere i prezzi. Egli ritiene che la* ***funzione prezzo*** *del grano possa essere*

$$P(q) = 8 - \frac{q}{1000}.$$

Se Rossi vende q *sacchi di grano a* $P(q)$ *dollari l'uno ella ricava un totale di* $q \cdot P(q)$ *Euro. Ne segue che la funzione* ***ricavo totale*** R *ha la formula*

$$R(q) = q \cdot P(q) = q \cdot \left(8 - \frac{q}{100}\right) = 8q - \frac{q^2}{1000}.$$

Prima di vendere il grano però Rossi ne deve comprare. Come grossista di granaglie egli può comprare una qualsiasi quantità di granaglie a 5$ *per sacco, quindi* q *sacchi costano* $5q$ *Euro. Inoltre Rossi ha delle spese fisse di* 500 *Euro per la compravendita del grano (costi di intermediazione, tasse, commissioni, etc.). La funzione* ***costo totale*** C *di Rossi ha quindi la formula*

$$C(q) = 5q + 500$$

Quanti sacchi di grano deve comprare e vendere Rossi? A quale prezzo li vende? Quanto guadagna?

Soluzione. Rossi vuole massimizzare il **profitto (guadagno)** G**,** la differenza tra ricavo e costo. Si deve quindi massimizzare la funzione

$$G(q) = R(q) - C(q) = 8q - \frac{q^2}{1000} - (5q + 500) = 3q - \frac{q^2}{1000} - 500.$$

Se differenziamo le tre funzioni $Pr(q), R(q)$ e $C(q)$ si ottiene

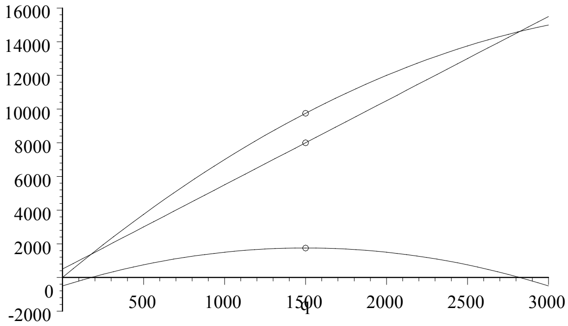
$$C'(q) = 5, \quad R'(q) = 8 - \frac{q}{500}, \quad G'(q) = 3 - \frac{q}{500}.$$

Imponendo $G' = 0$ si ottiene $q = 1500$. Per questo valore ottimo si ha

$$\begin{aligned} C(1500) &= 8000; \; R(1500) = 8 \cdot 1500 - \frac{(1500)^2}{1000} = 9750 \\ G(1500) &= 1250; \; P(q) = 6.5. \end{aligned}$$

La soluzione ottimale per Rossi è quella di vendere 1500 sacchi di grano al costo di $6,50$ Euro per sacco, con un profitto di 1250 Euro.

Il risultato può essere visualizzato disegnando sullo stesso grafico le funzioni R, C e G.

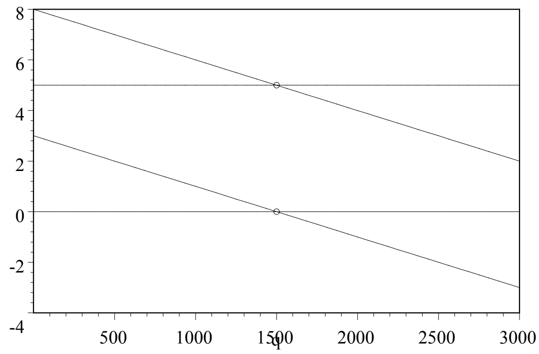


Ricavo, Costo, Guadagno

■

Marginalità: Derivate di Ricavo, Costo e Guadagno

Consideriamo i grafici delle derivate delle tre funzioni precedenti $G'(q)$, $R'(q)$ e $C(q)'$.



Funzioni: Ricavo Marginale,
Costo Marginale, Guadagno Marginale.

Ancora una volta ciò che interessa è il valore 1500. Come i cerchi nel disegno mostrano:

$$C'(1500) = R'(1500) = 5\,; \quad G'(1500) = R'(1500) - C'(1500) = 0\,.$$

In altre parole, nel valore critico $q = 1500$, C e R crescono con la stessa rapidità e quindi G è stazionario.

La matematica generalmente interpreta le derivate come tasso di cambiamento. L'affermazione $G'(1000) = 1$ significa, nel linguaggio dei tassi, che dopo aver venduto 1000 sacchi di grano, il venditore guadagna al tasso di 1 Euro al sacco.

Gli economisti, spesso, interpretano le derivate come **quantità marginali**. In questo linguaggio $G'(1000) = 2$ significa che, dopo aver venduto 1000 sacchi, il venditore farà un guadagno di 2 Euro sul prossimo sacco (il 1001 sacco ha "del margine").

Per ogni valore di q, il **guadagno marginale** a q è definito come il guadagno che verrà fatto sull'elemento successivo (cioè sull'elemento $q+1$). Il fatto che (come abbiamo visto prima) fosse $G'(1500) = 0$ implica, in senso marginale, che non c'è guadagno a vendere il sacco 1501.

Il **costo marginale** ed il **ricavo marginale** hanno lo stesso significato. Nell'esempio precedente si ha $C'(1500) = 5 = R'(1500)$. Nel linguaggio marginale significa che il sacco 1501 non da guadagno. Esso costa a Rossi 5 Euro e si vende allo stesso prezzo.

Questa è l'idea generale del concetto di marginalità per una qualsiasi funzione f che dipende dalla variabile q:

L'incremento marginale di f è l'aumento di f dovuto all'elemento $q+1$.

Incrementi Marginali e Istantanei: Economisti contro Matematici L'interpretazione marginale e di variazione delle derivate sono diverse? I matematici e gli economisti sono in accordo o in disaccordo?

Facciamo qualche calcolo per capire di cosa parliamo. Supponiamo che $G(q)$ descriva il profitto fatto nel vendere l'elemento $q-esimo$. La funzione di Profitto Marginale GM è data da:

$$GM(q) = \text{guadagno all'elemento } (q+1) = G(q+1) - G(q) \,.$$

La funzione derivata $G'(q)$ è invece definita dal limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(q+h) - G(q)}{h} \,.$$

Ponendo $h = 1$ nell'espressione precedente, otteniamo

$$G'(q) \approx \frac{G(q+1) - G(q)}{1} = GM(q) \,.$$

Quindi, $P'(q)$ e $GM(q)$ sono approssimativamente uguali; matematici ed economisti sono sulla stessa lunghezza d'onda.

In pratica la differenza tra GM e G' sono trascurabili anche perché questi sono tutti modelli della realtà e quindi comunque approssimati (ma non inutili!). L'altro motivo è che spesso i valori di G in gioco sono alti e quindi porre $h = 1$ nel rapporto incrementale da comunque una buona approssimazione. Se, per esempio, G è la funzione guadagno nell'esempio e $q = 2000$, allora si ha (provare a fare i conti):

$$P'(2000) = -1\,; \quad GM(2000) = G(2001) - G(2000) = -1.001\,.$$

Come si vede la differenza è minima.

Variazione dei Parametri Le strategie economiche dipendono spesso, in modo sensibile da vari parametri - il costo delle materie prime, il tasso di sconto, il tasso d'inflazione, etc.) che variano in modo non predicibile giorno dopo giorno. Al variare dei parametri, come ovvio, cambiano i risultati dei calcoli economici. La forma dei calcoli rimane però essenzialmente la stessa.

Esempio 206 *Il Signor G. Rossi, dell'esempio precedente, trova un nuovo fornitore di grano a* 4.50 *Euro al sacco. Cosa dovrebbe fare?*

Soluzione. Le funzioni prezzo P e ricavo R di Rossi sono le stesse, mentre le funzioni costo C e guadagno G sono cambiate:

$$p(q) = 8 - \frac{q}{1000}; \qquad R(q) = q \cdot p(q) = 8q - \frac{q^2}{1000};$$
$$C(q) = 4.5q + 500; \qquad G(q) = R(q) - C(q) = 3.5q - \frac{q^2}{1000} - 500.$$

Massimizziamo G come prima:

$$G'(q) = 3.5 - \frac{2q}{1000} = 0 \implies q = 1750.$$

Poiché $G(1750) = 2062.5$ e $p(1750) = 6.25$, abbiamo il seguente risultato. Rossi deve ora vendere 1750 sacchi a 6.25 Euro al sacco. Ne segue che Rossi deve passare il 50% del proprio risparmio ai suoi compratori. ■

Trattare il prezzo all'ingrosso come un parametro - senza un valore specifico - può risolvere molti problemi in un colpo solo.

Esercizio 207 *Il prezzo all'ingrosso del grano sembra cambiare ogni giorno. Rossi si pone allora questo problema: Quanti sacchi di grano deve vendere se il costo del grano è di* b *Euro al sacco? A quale prezzo? Quanto guadagnerà o perderà?*

Soluzione. Per ogni valore di b le funzioni hanno la seguente espressione:

$$p(q) = 8 - \frac{q}{1000}; \qquad R(q) = q \cdot p(q) = 8q - \frac{q^2}{1000};$$
$$C(q) = bq + 500; \qquad G(q) = R(q) - C(q) = (8 - b)q - \frac{q^2}{1000} - 500.$$

Massimizziamo G nel modo solito

$$G'(q) = 8 - b - \frac{2q}{1000} = 0 \implies q = 4000 - 500b.$$

Per questa quantità la formula del prezzo da

$$p(4000 - 500b) = 8 - \frac{4000 - 500b}{1000} = 4 + \frac{b}{2}.$$

Se ne ricava che

$$G(4000 - 500b) = 15,500 - 4000b + 250b^2.$$

Rossi ha questo risultato generale. Se compra il grano a b Euro al sacco, egli dovrebbe vendere a $4 + b/2$ Euro al sacco. Comportandosi così, potrà vendere $4000 - 500b$ sacchi per un guadagno totale di $15,500 - 4000b + 250b^2$ Euro. ■

5.5.2 Esercizi

1. Nell'Esempio 1 il signor Rossi ha pensato che la formula
$$p\,(q) = 8 - \frac{q}{1000}$$
fosse ragionevole per descrivere il prezzo di vendita del grano a sacco per $q$sacchi venduti.

   (a) Dire in quale intervallo di p e di q ha senso questa funzione. Quali sono le unità di misura sui due assi?

   (b) La funzione p di cui sopra è monotona decrescente. Perché Rossi ha scelto una funzione decrescente? Spiegarlo a parole.

   (c) La funzione p scelta sopra è lineare. Rossi l'ha scelta per la sua semplicità. Ritenete che sia una buona scelta? Vi aspettereste una reale funzione dei prezzi lineare? Se no, pensare e descrivere una funzione dei prezzi più convincente e spiegate perché la ritenete tale.

2. Questo Esercizio si riferisce all'Esempio 2.

   (a) Su di un sistema di assi, disegnare le funzioni C, R e G dell'Esempio 2. Cosa mostra graficamente il risultato sul possibile massimo profitto di Rossi?

   (b) Calcolare $C'\,(q)\,, R'\,(q)$ e $G'\,(q)\,.$ Usare i risultati per calcolare il costo marginale, il ricavo marginale e il guadagno marginale per $q = 1500$. Cosa significa in questo contesto il fatto che il guadagno marginale a $q = 1500$ è positivo?

   (c) Trovare un valore di q per il quale il guadagno marginale a q è negativo. Quanto valgono il ricavo marginale e il guadagno marginale in questa situazione?

3. Considerate ancora la situazione dell'Esempio 1; usate le funzioni C, p, R e G date.

   (a) Supponiamo che Rossi voglia solo non perdere soldi. Qual'è la minima quantità di sacchi di patate che deve vendere? Qual'è la quantità massima? Spiegare la risposta.

   (b) Supponiamo che Rossi voglia massimizzare il ricavo, indipendentemente dal guadagno. Quanti sacchi deve vendere? A quale prezzo?

4. Rifare l'esercizio precedente nella situazione dell'esempio 2.

5. Nell'Esempio 3 abbiamo concluso che se i sacchi di patate vengono venduti all'ingrosso a b Euro, Rossi dovrà vendere $4000 - 500b$ sacchi a $4 + b/2$ Euro al sacco, per un profitto ottimo di $15,000 - 4000b + 250b^2$ Euro.

   (a) Cosa significa questa conclusione per $b = 5$ e per $b = 4.5$? I risultati ottenuti concordano con quelli trovati prima?

(b) Qual'è la strategia migliore di Rossi per $b = 7$?

(c) Non tutti i valori di b hanno senso. In questo contesto i valori di b sensati sono quelli tra 0 e 8. Tra tutti questi, qual'è il più grande che permetta a Rossi di finire pari?

6. Un costruttore di lampioni ha costi fissi di 6000 Euro al mese. Il materiale costa 1.0 Euro per unità. Se non vengono costruite più di 4500 lampioni al mese, il costo del lavoro è di 0.40 Euro per unità. Per ogni unità sopra le 4500 il costruttore deve pagare il lavoro una volta e mezzo. Il costruttore può vendere 4000 unità al mese a 7 Euro per unità. Ci si aspetta una crescita delle vendite mensili di 100 unità per ogni riduzione di prezzo di 0.10 Euro. Quanti lampioni dovrebbero essere costruiti al mese per massimizzare il profitto?

7. Un negozio di successo deve controllare il suo magazzino. Troppo magazzino implica un costo eccessivo per interessi, un costo troppo alto di magazzino e obsolescenza. Un magazzino troppo piccolo richiede lavoro di richiesta e riordino, costi di consegna,ed aumenta la possibilità di carenza di beni.
   Se viene ordinato un numero n di forni a microonde, circa la metà rimarrà in magazzino. Il negoziante stima che questo costi 25 Euro tenere in stock il forno per un anno. Il costo di un ordine di n forni è di 250 Euro più 2.50 Euro per forno.
   Supponiamo che il negozio venda 1000 forni l'anno e che ordini sempre i forni in lotti di n. Quale valore di n minimizza i costi annui? La risposta ti sembra ragionevole? Perché o perché no?

5.5.3 Variazioni Correlate

L'analisi è stata sviluppata per descrivere e predire i fenomeni del cambiamento: i moti planetari, gli oggetti in caduta libera, la variazione di popolazioni, etc. In molte applicazioni pratiche, più quantità correlate, variano insieme. Con l'analisi possiamo descrivere e calcolare queste **quantità correlate.**

Per spiegare cosa intendiamo, iniziamo, al solito, con un esempio

Esempio 208 *Un punto P si muove da sinistra verso destra lungo la curva $y = x^2$ con velocità orizzontale costante di* $3\,m/\sec$. *Quanto vale la componente verticale della velocità nel momento in cui il punto P passa per il punto* $(1,1)$? *Quando passa per* $(2,4)$?

Soluzione. Quando P si muove, le quantità che variano col tempo e che sono di interesse per il problema, sono le coordinate x ed y del punto P. Scritte come funzioni esse sono:

$$\begin{aligned} x\,(t) &= \text{il valore della coordinata } x \text{ al tempo } t\,; \\ y\,(t) &= \text{il valore della coordinata } y \text{ al tempo } t\,. \end{aligned}$$

Poiché il punto P si muove lungo la parabola $y = x^2$, le funzioni x ed y soddisfano le equazioni

$$y\,(t) = x^2\,(t)\ .$$

Differenziando entrambi i lati rispetto a t si ottiene

$$\frac{dy}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt}$$

o più compattamente, $y' = 2\,x\,x'$. Questa equazione ci permette di risolvere il problema posto. Per ipotesi $dx/dt = 3$ per tutti i t. Nel punto $(1,1)$, $x = 1$, quindi si ha

$$\frac{dy}{dt}_{|y=1} = 2 \cdot 1 \cdot 3 = 6\,m/\sec\ .$$

Nel punto $(2,4)$ si ha

$$\frac{dy}{dt}_{|y=2} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12\,m/\sec\ .$$

Da notare, prima di terminare, che mentre la velocità orizzontale è costante quella verticale cresce con lo spostarsi del punto verso destra. ■

Il generico problema delle quantità correlate chiede di conoscere la variazione di una quantità fornendo informazioni su una o più delle altre. La soluzione di problemi con quantità correlate può essere complicata, ma l'idea di base che li regola è semplice:

Si parte con una equazione che collega tra loro due o più quantità che variano col tempo.

Si differenzia l'equazione rispetto al tempo, usando la regola della derivazione delle funzioni composte. L'equazione risultante mette in relazione le variazioni delle quantità stesse. Si usa questa equazione per trovare la variazione richiesta.

Come sempre, nel modellare un problema la cosa più importante e difficile è identificare le quantità in questione e scrivere l'equazione che le lega.

Esempio 209 *(Pitagora, Newton e il Controllo di Velocità). Un elicottero della Polizia vola a circa* $300\,m$ *d'altezza sulla A1 controllando il traffico autostradale diretto verso il mare e la velocità delle automobile, con il radar. Mentre la macchina di Gianni, diretta verso il mare, passa sotto l'elicottero, il poliziotto mette in funzione il radar. Il risultato che ottiene è il seguente: quando la macchina viene controllata è a* $600\,m$ *dall'elicottero e viaggia ad una velocità di* $35\,m/\sec$*. La macchina va multata?*

Soluzione. Fermato da una macchina della polizia che contesta l'infrazione, Gianni nega di aver infranto il limite di $130\,Km/h$. Infatti, egli ragiona, $130Km/h$ sono $(130/3.6)\ m/\sec \approx 36.111$ quindi sono ampiamente dentro i limiti.

Il poliziotto lo guarda con un sorriso e lo multa dicendogli: crede che io non conosca il Teorema di Pitagora ? Dopo disegna il diagramma

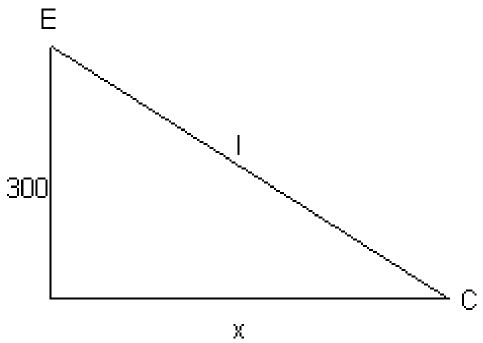


Diagramma del Poliziotto

Nel diagramma E è l'elicottero, C l'auto, l la retta che unisce E e C, x la distanza orizzontale da E a C. Infine $300\,m$ è l'altezza costante dell'elicottero. Le quantità l e x variano, ovviamente, col tempo. Il teorema di Pitagora ci dice tuttavia che ad ogni istante t le quantità x ed l soddisfano la relazione

$$l^2 = x^2 + 300^2$$

Derivando questa relazione rispetto al tempo si ottiene una relazione tra l, x e le loro derivate

$$l^2 = x^2 + 300^2 \implies 2l \cdot \frac{dl}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} \implies \frac{dx}{dt} = \frac{l}{x} \cdot \frac{dl}{dt}.$$

Al tempo del controllo, $dl/dt = 35$, $l = 600$, ed x era $\sqrt{600^2 - 300^2} \approx 520$. Ne segue che la velocità dell'auto era

$$\frac{dx}{dt} = \frac{l}{x} \cdot \frac{dl}{dt} = \frac{600}{520} \cdot 35 \approx 40.3\, m/\sec\,,$$

quindi di $40.385 \cdot 3.6\, km/h = 145.39\, km/h$. Pagate la multa! ■

Esercizi

1. L'altezza di un rettangolo cresce con una velocità di $2\,cm/\sec$ e la sua lunghezza cresce con una velocità di $3\,m/\sec$. Con quale velocità cresce l'area del rettangolo quando questo ha altezza $4\,cm$ ed altezza $5cm$?

2. Scavando una buca in una strada, viene accidentalmente rotto un tubo dell'acqua. L'acqua fuoriesce con una portata di $30\,cm^3/\sec$ e forma una pozza circolare di profondità $2\,cm$. Con quale velocità aumenta la superficie della pozza?

3. Due macchine lasciano un incrocio nello stesso momento. Una viaggia verso nord alla velocità di $50\,km/h$, l'altra verso est con velocità $70\,km/h$. Con quale velocità cambia la loro distanza dopo 5 min.?

4. La legge di Boyle stabilisce che se la temperatura del gas rimane costante, allora la temperatura T ed il volume V soddisfano l'equazione $P{\cdot}V = costante$. Se il volume diminuisce alla velocità di $10\,cm^3/\sec$. Quanto cresce rapidamente la temperatura quando la pressione è di $1\,kg/cm^2$ ed il volume è $2\,cm^3$?

5. Due aerei sono in prossimità del centro di controllo aereo di Fiumicino. Il volo Dumbo 123 proviene da Sud ed il volo Peterpan 456 da est. Entrambi sono ad un'altezza di $10,000\,m$ e percorrono un cammino rettilineo che li porta direttamente verso il centro di controllo aereo. Il volo Dumbo 123 è a $56\,km$ dal centro e si avvicina con una velocità di $700\,km/h$. Il volo Peterpan 456 è a $72\,km$ dal centro e si avvicina ad una velocità di $800\,km/h$. Qual'è la minima distanza tra gli aeroplani? Violerebbe la distanza minima di sicurezza imposta dalla Agenzia Internazionale del volo di $8\,km$?

6. Della sabbia viene versata in una pila a forma di cono in modo da formare sempre coni di raggio uguale all'altezza. Se la sabbia viene versata con una velocità di $20\,dm^3/\min$ con quale velocità sale l'altezza del cono quando la pila di sabbia ha il volume di $5000\,dm^3$?

7. Del petrolio fuoriesce da una petroliera alla velocità di $5000\,litri/\min$. La perdita forma una macchia circolare. La profondità della macchia varia da un massimo di $5\,cm$ nel punto di fuoriuscita, ad un minimo di $0,5\,cm$ sul bordo esterno. Con quale velocità cresce il raggio della chiazza, 4 ore dopo che la petroliera ha cominciato a perdere?

8. Una palla sferica di ferro di $30\,cm$ di diametro è ricoperta da uno strato uniforme di ghiaccio.

   (a) Se il ghiaccio fonde alla velocità di $10\,cm^3/\min$, con quale velocità diminuisce lo spessore del ghiaccio quando ha uno spessore di $3\,cm$. ?

   (b) Con quale velocità diminuisce la superficie del ghiaccio allo stesso tempo?

9. Supponiamo di fare una bolla sferica con della gomma. Indichiamo con V il volume di gomma nella bolla, R il raggio interno della bolla e T il suo spessore. V, R e T sono funzioni del tempo.

   (a) Scrivere la formula per V in funzione di R e T

   (b) Assumiamo che la quantità di gomma nella bolla non vari. Quanto vale $V'(t)$?

   (c) Dopo 1 min di gonfiaggio la bolla ha il diametro di $50\,cm$ e uno spessore di $1\,mm$. Se il raggio interno della bolla cresce con una velocità di $8\,cm/\min$ come cambia lo spessore della bolla?

10. Un elicottero di controllo autostradale viaggia ad un'altezza di $500\,m$. Il pilota vede una macchina venire nella sua direzione. Il radar gli dice che la macchina è ad una distanza di $2000\,m$ e che la distanza decresce con una velocità di $180\,km/h$. L'autista va multato?

11. Un filtro ha forma di cono rovesciato. L'acqua fuoriesce dal filtro ad una velocità di $10\,cm^3/\min$. Quando la profondità dell'acqua nel filtro è di $8\,cm$ la profondità diminuisce con una velocità di $2\,cm/\min$. Quanto vale il rapporto tra altezza e raggio del cono ?

12. Un filtro ha forma di cono rovesciato di altezza $10cm$ e raggio $2cm$. Esso è parzialmente riempito di liquido che filtra dalla superficie laterale con una velocità proporzionale all'area della superficie del cono bagnata dal liquido. Il liquido viene versato dalla sommità del cono alla velocità di $1\,cm^3/\min$. Quando la profondità del liquido è di $4\,cm$ la profondità decresce con una velocità di $0.1\,cm/\min$. Con quale velocità dovrebbe essere versato il liquido in modo che la profondità del liquido nel filtro rimanga di $4cm.$?

13. Le lancette di un orologio da campanile sono lunghe $2\,m.$ e $1.5\,m$ rispettivamente. Con quale velocità si allontanano le punte delle lancette quando l'orologio segna le 9.00?

14. Una piscina è lunga $20\,m$, larga $12\,m$ e profonda $1\,m$ ad una estremità e $3\,m$ all'altra. L'acqua viene versata con una portata di $100\,litri/\sec$.

   (a) Con quale velocità cresce il livello dell'acqua quando ci sono $2000\,litri$ d'acqua nella piscina?

   (b) Con quale velocità cresce il livello dell'acqua quando ci sono $3000\,litri$ d'acqua nella piscina?

15. Una ruota da Luna Park del raggio di $50\,m.$ gira con una velocità angolare di $10\,rad/\min$. Qual'è la velocità di salita di un passeggero quando la sua altezza è di 15 metri più alta del centro della ruota?

16. UN ponte ferroviario alto $20\,m$ sul livello dell'acqua traversa perpendicolarmente un corso d'acqua. Una persona sul treno che viaggia a $60\,km/h$

passa sul centro del ponte allo stesso istante in cui una persona passa sotto il centro del ponte a bordo di un motoscafo a $20\,km/h$. Con quale velocità si separano le due persone 10 secondi più tardi ?

17. Un palo lungo 4 metri è appoggiato al muro. Se il fondo del palo scivola sul terreno, qual'è la velocità dell'estremità del palo appoggiata al muro, quando l'estremità sul terreno è a 2 metri dal muro?

18. Un aereo diretto a est passa sopra una città alle 11.30 con una velocità di $700\,km/h$. Un secondo aereo diretto a nord-est passa sulla città alle 12.00 con velocità di $800\,km/h$. Con quale velocità si separano alle ore 13.00?