Capitolo 3

Serie di Potenze

Una **serie di potenze** è una serie della forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k$$

Le costanti a_k sono chiamate **coefficienti di** x^k . Il simbolo x indica la variabile. Una serie di potenze può convergere per alcuni valori di x e divergere per altri.

Esempio 3.1 ***(Serie geometrica)*** *Tra le serie di potenze più semplici possiamo considerare la serie*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

(dove ovviamente $a_k = 1\ \forall k \geq 1$). Dire per quali valori di x converge.

Soluzione. Supponiamo x fissato e applichiamo alla serie numerica il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} |x| = |x|$$

Poiché il criterio del rapporto implica convergenza per valori del limite minori di uno, **si ha convergenza se** $|x| < 1$ e **divergenza se** $|x| > 1$. Verifichiamo cosa accade per $|x| = 1$.

Per $x = 1$ si ha la serie$\sum_{k=0}^{\infty} 1$ che chiaramente diverge, mentre per $x = -1$ si ha la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ che è indeterminata. Ne segue che **la serie converge solo per** $|x| < 1$.

E' possibile calcolare la somma della serie? Sappiamo che la somma della serie numerica $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ è data da $\dfrac{1}{1-a}$ quando $|a|<1$ ne segue che

$$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k=\frac{1}{1-x} \quad \text{se} \quad |x|<1$$

■

Esempio 3.2 *Sappiamo che la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$ *converge. Consideriamo al serie di potenze* $S(x)=\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} x^k$. *Questa serie converge chiaramente per* $x=1$ *ed è* $S(1)=e$. *Per quali altri valori di* x *converge la serie?*

Soluzione. Usiamo il test del rapporto per valutare la convergenza assoluta della serie. Per ogni valore dell'ingresso x è

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k x^k}\right|=\lim_{k\to\infty}\frac{\left|x^{k+1}\right|}{(k+1)!}\frac{k!}{\left|x^k\right|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{k+1}=0$$

Il test del rapporto ci dice che il limite è minore di uno (vale 0) per ogni valore di x, cioè che la serie data converge per ogni valore dell'ingresso x. Si può mostrare che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} x^k$ converge a e^x per ogni x. In particolare $e=\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} \approx 2.718281828450945$ approssimato alla sedicesima cifra decimale. ■

Come abbiamo fatto per le serie numeriche, possiamo calcolare le somme parziali di una serie di potenze

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_nx^n$$

Come si nota immediatamente $S_n(x)$ è un polinomio di grado n. I polinomi sono facili da derivare ed integrare, termine a termine.

Con la dovuta attenzione all'intervallo di convergenza, le serie di potenze mantengono la stessa proprietà.

Nota 3.3 ***(Scelta del Centro o Punto Centrale)*** *Consideriamo le seguenti espressioni polinomiali*

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & x^2 - 2x + 2 \\ q(x) & = & (x-1)^2 + 1 \\ r(x) & = & (x-2)^2 + 2(x-2) + 2 \end{array}$$

Esse rappresentano sostanzialmente la stessa funzione. La loro differenza è solo nella scelta di evidenziare un **punto centrale (o centro)** *rispetto al quale esprimere l'espressione polinomiale. L'espressione $p(x)$ è centrata in $x = 0$, l'espressione $q(x)$ è centrata in $x = 1$ ed infine l'espressione $r(x)$ è centrata in $x = 2$.*
Esse rappresentano tre traslazioni della stessa funzione. La scelta della espressione dipende solo dal punto intorno al quale si vuole focalizzare l'attenzione nello studio del comportamento del polinomio.
Lo stesso tipo di ragionamento lo applichiamo alle serie di potenze. Per esempio, le due serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k \qquad e \qquad \sum_{k=0}^{\infty} 2^k (x-1)^k$$

hanno come base $x = 0$ la prima, e $x = 1$ la seconda. La seconda può essere letta come la traslazione (della quantità 1) della prima, nel senso che il comportamento nell'intorno di $x = 1$ della seconda è identico al comportamento intorno a $x = 0$ della prima.

3.1 Serie di Potenze come Funzioni

Ogni serie di potenze

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

definisce, in modo naturale, una funzione $x \to S(x)$. Per ogni valore di x, $S(x)$ è il valore della somma della serie, se la somma esiste.
Come sappiamo, ogni funzione definita attraverso una "formula" ha un suo dominio naturale: l'insieme degli x per cui la formula ha senso. La stessa cosa vale per le serie di potenze; il dominio di una serie, più noto come **intervallo di convergenza** è l'insieme degli x per cui la serie converge.
Abbiamo visto, per esempio che l'insieme di convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ è l'intervallo $(-1, 1)$, mentre per la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ha intervallo di convergenza $(-\infty, +\infty)$.

Esempio 3.4 *Qual'è l'intervallo di convergenza della serie* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$?

Soluzione. Possiamo riscrivere la serie nella forma

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2\,x)^k$$

Questa è una serie geometrica di ragione $2x$. Noi sappiamo che una serie geometrica converge se la ragione è minore di uno; deve allora essere $|2x| < 1 \Longrightarrow |x| < \dfrac{1}{2}$. In questo caso la somma della serie è data da

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (2\,x)^k = \frac{1}{1 - 2\,x}$$

$\blacksquare$

Il primo problema, nell'affrontare lo studio di una serie di potenze è quello di trovare l'intervallo di convergenza, così come per le funzioni il primo problema è trovare il dominio di definizione. In molte situazioni il test del rapporto è utile allo scopo. Mostriamo il suo uso con un esempio.

Esempio 3.5 *Trovare l'intervallo di convergenza della serie*

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}$$

Provare a individuare la somma della serie.

Soluzione. Usiamo il test del rapporto per verificare la convergenza assoluta della serie.

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)\; x^k}{k\,x^{k-1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)}{k}\; |x| = |x|$$

Quindi la serie converge per $|x| < 1$ e diverge per $|x| > 1$. Per $|x| = 1$ il test non da risposta, ma basta notare che in questo caso il termine generale della serie NON tende a zero per affermare che anche in questo caso la serie non converge. Se ne conclude che la serie converge solo per $|x| < 1$.
In un esempio precedente abbiamo visto che

$$S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

con la serie che converge per $|x| < 1$. Se si derivano il primo ed il secondo membro si ha

$$S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

E' allora ragionevole aspettarsi che

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Rimane un problema da affrontare per essere sicuri di ciò che abbiamo fatto. La proprietà che la derivata della somma è uguale alla somma delle derivate è stata ricavata nel caso di un numero FINITO di addendi; ormai sappiamo che il passaggio da somme finite a somme infinite implica molti problemi. Dobbiamo assicurarci che ciò che abbiamo fatto abbia senso. Per il momento, non avendo ancora stabilito la teoria, possiamo provare a vedere cosa accade per un punto particolare (NON è una dimostrazione). Prendiamo, per esempio $x = 1/2$ e vediamo cosa si ottiene. Da una parte si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

dall'altra

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4\ .$$

Valutiamo (con software) la somma della serie, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \approx 3.999958038$$

L'evidenza numerica ci suggerisce l'uguaglianza. ■

Nota 3.6 *Per quanto l'operazione fatta sembri corretta, rimangono due di problemi da affrontare:*
- ▶ *E' legittimo derivare una serie termine a termine?*
- ▶ *Su quale intervallo la serie derivata converge?*

Daremo una risposta a queste domanda tra breve.

Esempio 3.7 *Integriamo la serie geometrica* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ *termine a termine. Si ottiene*

$$T(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\,.$$

Qual'è l'insieme di convergenza di $T(x)$? *Qual'è la somma ?*

Soluzione. Poiché $S(x)$ converge (assolutamente) per $|x| < 1$ è lecito aspettarsi la stessa cosa per $T(x)$. Controlliamo usando il test del rapporto, si ha

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}x^{k+1}}{a_k\, x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \, \frac{k}{k+1} = |x|$$

quindi, come ci apettavamo, $T(x)$ converge assolutamente nell'intervallo $(-1, 1)$.
Vediamo cosa accade agli estremi. Ponendo $x = \pm 1$ si ottengono le due serie numeriche

$$T(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}, \quad \text{e} \quad T(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\,.$$

Come sappiamo, la prima serie diverge, mentre la seconda converge (ma non assolutamente). La serie $T(x)$ converge allora nell'intervallo $[-1, 1)$.
Poiché abbiamo ottenuto $T(x)$ integrando $S(x)$ è lecito pensare una relazione equivalente per i limiti:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \Longrightarrow x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots = -\ln(1-x)\ .$$

Facciamo un test, per esempio per $x = 1/2$; si ha

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{(1/2)^k}{k} \approx 0.69314714 \quad \text{e} \quad -\ln 1/2 \approx 0.69314718$$

(i calcoli sono ovviamente stati fatti con il computer). ■

Nota 3.8 *Per quanto l'operazione fatta sembri corretta, rimangono due di problemi da affrontare:*
► *E' legittimo integrare una serie termine a termine?*
► *Su quale intervallo la serie derivata converge?*

Daremo una risposta a queste domanda tra breve.

Esempio 3.9 *Consideriamo la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$. Dire dove converge.*

Soluzione. La serie converge certamente per $x = 0$. Se $x \neq 0$ il test del rapporto da

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1} x^{k+1}}{a_k\, x^k} \right| = \lim_{k\to\infty} |x| \, \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} k\, |x| = +\infty$$

Il test del rapporto ci dice per ogni $x \neq 0$ la serie NON converge. La serie converge quindi solo per $x = 0$. ■

3.1.1 Cosa Dicono gli Esempi

Gli esempi precedenti illustrano bene alcune proprietà importanti delle serie di potenze e dei loro insiemi di convergenza.

Raggio di convergenza. Tutte le serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ convergono per $x = 0$. La vera questione è questa:

Quanto si può discostare x da zero senza distruggere la convergenza?

In tutti gli esempi fatti, l'insieme di convergenza è un intervallo centrato nell'origine. Questo fatto non è casuale. *Il dominio di convergenza di ogni serie di potenze è un intervallo centrato nell'origine.* Il suo raggio è chiamato **raggio di convergenza** della serie.
Enunciamo un teorema che mette insieme tutti questi fatti.

Teorema 3.10 *Sia $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ una serie di potenze e sia C un numero reale. Se $S(x)$ converge per $x = C$ allora converge per ogni $|x| < C$.*

Dimostrazione. (*Idea della dimostrazione per $C > 0$*) Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ converga per $x = C > 0$, quindi la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, C^k$ converge. Allora il termine generale della serie $a_k\, C^k \to 0$ quando $k \to \infty$.
Consideriamo adesso la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ con $|x| < C$ e confrontiamola con la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, C^k$. Si ha che

$$\left| \frac{a_k\, x^k}{a_k\, C^k} \right| = \left| \frac{x}{C} \right|^k < 1$$

poiché $|x| < C$. Quindi

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \left|x^k\right| < \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, C^k\ .$$

Il criterio del confronto ci dice che $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ converge se $|x| < C$.

Se $C < 0$ la dimostrazione è analoga. ■

Cosa accade agli estremi. Abbiamo visto dagli esempi che la serie convergeva in un intervallo aperto $(-1, 1)$, o in un intervallo semichiuso $[-1, 1)$ o altro. Per saper cosa accade negli estremi ciò che si deve fare è calcolare la serie numerica in quei punti e valutare. Ciò che comunque più interessa è il raggio di convergenza.

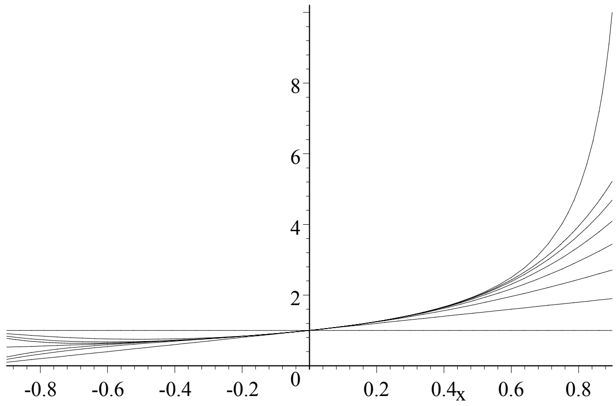
Raggio di convergenza. Negli esempi sopra il raggio di convergenza era $R = 1$; in realtà sono possibili raggi di convergenza di qualsiasi valore positivo. Per sincerarsene considerate la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{R^k}$ e verificate che il raggio di convergenza è R.

3.1.2 Convergenza delle Serie di Potenze

Per ogni $n \geq 0$, la somma parziale n-esima della serie di potenze $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ è il polinomio

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n\ .$$

Affermare che la serie di potenze converge nell'intervallo $(-R, R)$ significa che, per ogni x nell'intervallo $p_n(x) \to S(x)$ quando $n \to \infty$. Il seguente grafico ci da l'effetto visivo di ciò che accade nel caso della serie $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ che sappiamo convergere a $\frac{1}{1-x}$ nell'intervallo $(-1, 1)$



$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ converge a $\dfrac{1}{1-x}$ in $(-1,1)$

Sono qui disegnati i grafici di $\dfrac{1}{1-x}$ e dei primi sette polinomi $p_0(x)$, $p_1(x)$, $\cdots$, $p_6(x)$. Si vede che al crescere dell'indice essi approssimano sempre meglio la funzione limite.

Nota 3.11 *Per finire, vorremmo notare la differenza lessicale ma anche sintattica che esiste nelle due seguenti affermazioni:*

1) per ogni $x \in (-R,R)$ i polinomi approssimanti $p_n(x)$ convergono a $S(x)$;

2) i polinomi approssimanti $p_n(x)$ convergono a $S(x)$ per ogni $x \in (-R,R)$

Tradotta nel linguaggio formale la prima afferma che:

$$\forall x \in (-R,R)\ ,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \text{ tale che } \forall n > N \implies |S(x) - p_n(x)| < \varepsilon$$

la seconda

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \text{ tale che } \forall n > N \implies |S(x) - p_n(x)| < \varepsilon\ \forall x \in (-R,R)\ .$$

Ovvero:

- nella prima si fissa x ed ε, quindi si trova N , che dipende sia da x che da ε $(N = N(x,\varepsilon))$, infine si considera la differenza tra polinomio e somma nel punto fissato ;

- nella seconda si fissa solo ε in dipendenza del quale si trova N (che quindi dipende solo da ε, $N = N(\varepsilon)$), e si mostra che la differenza tra polinomio e somma vale per tutti i punti nell'intervallo.

La prima si chiama ***convergenza puntuale*** *(si fissa il punto), la seconda* ***convergenza uniforme.***
Si può dimostrare che la convergenza dei polinomi approssimanti è ***uniforme in ogni intervallo chiuso*** *contenuto in* $(-R, R)$.

3.1.3 Esercizi

1. Trovare il raggio di convergenza delle seguenti serie

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k\, 2^k}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, x^n$; $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!+n}$

2. Trovare raggio ed intervallo di convergenza delle seguenti serie

   (a) $\sum_{i=1}^{\infty} (\,3x)^i$; $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\,3x)^m}{m!}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\,3x)^n}{n}$; $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\,3x)^j}{j^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (x-2)^n$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n^4}$

   (d) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x-5)^m}{m\,\ln m}$; $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(x+1)^m}{m}$

3. Sia $R > 0$ una costante positiva,

   (a) mostrare che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{R^k}$ converge in $(-R, R)$

   (b) mostrare che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k\,R^k}$ converge in $[-R, R)$

   (c) mostrare che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k^2\,R^k}$ converge in $[-R, R]$

   (d) determinare una serie che converge in $(-R, R]$

4. Per ognuno dei seguenti intervalli determinare una serie che ha l'intervallo dato come intervallo di convergenza

   (a) $[-4, 4)$; $[-1, 5]$

   (b) $(-4, 0)$; $(8, 16]$; $[-11, -3)$

5. Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converga. Mostrare che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge assolutamente per $|x| < 1$

6. Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converga in $-2 < x \leq 2$

   (a) spiegare perché la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-1)^k$ ha raggio di convergenza $R = 2$

   (b) mostrare che la serie di potenze $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-3)^k$ converge in $(1, 5]$

   (c) trovare l'intervallo di convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x+1)^k$

7. Supponiamo che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ converga solo se $-11 \leq x < 17$

   (a) qual'è il raggio di convergenza della serie ?

   (b) quanto vale b ?

8. Trovare l'intervallo di convergenza (valutando il comportamento agli estremi) delle seguenti serie di potenze

   (a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x-2}{3}\right)^k$; $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x-2)^j}{j!}$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k\, 4^k}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

   (c) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x+5)^i}{i\,(i+1)}$; $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m (x+1)^m}{m}$

9. Supponiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$ converga per $x = -7$ e diverga per $x = 7$, dire quale delle seguenti affermazioni è vera, quale falsa, quale possibile, giustificando la risposta.

   (a) la serie converge per $x = -8$

   (b) la serie converge per $x = 1$

   (c) la serie converge per $x = 3$

   (d) la serie diverge se $x = -11$

   (e) la serie diverge se $x = -10$

   (f) la serie diverge per $x = 5$

   (g) la serie diverge per $x = -5$

10. Data la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$ dire quali delle seguenti affermazioni è vera, falsa o possibile. Giustificare la risposta

    (a) la serie converge solo se $|x| > 2$

    (b) la serie converge per tutti i valori di x

    (c) se il raggio di convergenza della serie è 3 la serie converge per $-2 < x < 4$

    (d) l'intervallo di convergenza della serie è $[-5, 5]$

    (e) Se l'intervallo di convergenza della serie è $(-7, 9)$ il raggio di convergenza è 7

11. La serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge ad e^x per ogni $x \in \mathbb{R}$

    (a) se $x = -1$ la serie converge a $1/e$. Trovare S_{10} in questo caso. Di quanto S_{10} differisce da $1/e$? (usare calcolatrice o computer per il conto).

    (b) per $x = -1$ la serie è a segni alterni. Cosa possiamo dire sul massimo errore commesso calcolando S_{10} per stimare $1/e$? Per quale valore di n S_n stima $1/e$ con un errore minore di 10^{-10}

12. Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^n}{3^n + 5}$

    (a) mostrare che $f(10)$ non è definito, cioè che la serie che definisce $f(x)$ diverge per $x = 10$

    (b) quali tra i numeri 0.5, 1.5, 3 e 6 fanno parte del dominio di f ?

    (c) Stimare $f(1)$ con un errore inferiore a 0.01

13. Sia $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k! + k^3}$

    (a) qual'è il dominio di definizione di $h(x)$ (cioè l'insieme degli x per i quali la serie converge) ?

    (b) stimare $h(0)$ a meno di 0.005 del suo valore esatto

    (c) stimare $h(3)$ a meno di 0.005 del suo valore esatto

14. Sai data la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

(a) calcolare $\lim_{x\to 1-} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

(b) spiegare perché il risultato di (a) non implica che $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ converga.

3.1.4 Serie di Potenze: Integrazione e Derivazione

Ogni serie di potenze

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

può essere pensata come una funzione della variabile x. Il suo dominio è l'intervallo di convergenza della serie. In questo paragrafo cerchiamo di mostrare l'importanza e l'utilità delle funzioni definite come serie di potenze.

Data la serie $S(x)$, convergente o divergente che sia, è facile derivare o integrare termine a termine la serie, costruendo così due nuove serie $D(x)$ e $I(x)$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ D(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots + n\,a_n x^{n-1} + \cdots \\ I(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + a_3 \frac{x^4}{4} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots \end{aligned}$$

Rimangono ancora aperte le questioni poste precedentemente

- Se la serie S ha raggio di convergenza R, qual'è il raggio di convergenza di D ed I?

Ammesso che abbiano lo stesso raggio di convergenza R (siano cioè definite nello stesso intervallo $(-R, R)$) possiamo dire che

$$D(x) = S'(x) \quad \text{e} \quad I(x) = \int_0^x S(t)\ dt \ \ ?$$

Il seguente teorema, che enunceremo senza dimostrazione, da una risposta completa ai problemi posti

Teorema 3.12 ***(Derivazione ed integrazione delle serie di potenze)*** *Sia $S(x)$ una serie di potenze con raggio di convergenza $R > 0$ Siano $D(x)$ e $I(x)$ definite come sopra. Allora:*
- *Sia D che I hanno raggio di convergenza R;*
- *$D(x) = S'(x)$ per tutti gli $|x| < R$;*
- *$I(x) = \int_0^x S(t)\ dt$ per tutti gli $|x| < R$.*

Il teorema ci dice, fra l'altro, che la funzione S, data dalla serie di potenze, è differenziabile e che la sua derivata è ancora una serie di potenze (quindi differenziabile). Ne segue che una serie di potenze è differenziabile un'infinità di volte e tutte le serie ottenute hanno lo stesso raggio di convergenza R.

Esempio 3.13 *Abbiamo affermato che la funzione e^x è espressa dalla serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Spiegare perché.*

Soluzione. Noi sappiamo dall'Analisi 1 che si ha $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, cioè che e^x è l'unica funzione (a meno di costanti moltiplicative) con la proprietà che $f(x) = f'(x)$. Differenziamo ora la serie termine a termine di ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

cioè $S'(x) = S(x)$. Ne risulta che $S(x)$ è della forma $S(x) = C\, e^x$, ma $e^0 = 1 = S(0)$ per cui $e^x = S(x)$. ■

Abbiamo già visto come alcune funzioni: $\frac{1}{1-x}$, e^x, $\ln(1-x)$ possano essere espresse, in un certo intervallo, in termini di serie di potenze. E' naturale domandarsi quali altre funzioni posseggano la stessa proprietà, possano cioè essere rappresentate come serie di potenze e come fare a rappresentarle. Il Teorema (3.12) fornisce alcune tecniche che permettono la determinazione di nuove serie da quelle già ottenute, ma non basta.
Per esempio, non permette di vedere che anche le funzioni trigonometriche sono sviluppabili in serie di potenze. La funzione $\sin x$ ha sviluppo

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

che converge per tutti gli x di $\mathbb{R}$.
Questo sviluppo è particolarmente importante, tra l'altro, perché le funzioni trigonometriche, così come la funzione esponenziale e, più in generale, le funzioni trascendenti, non hanno una formula algebrica finita con cui essere espresse. Per queste funzioni, il loro sviluppo in serie è quindi la cosa migliore che possiamo conoscere ed il metodo più semplice ed affidabile per calcolarne i valori, anche se approssimati.

Esempio 3.14 *Usare l'espressione dello sviluppo di* $\sin x$ *dato sopra, per calcolare* $\sin 1$ *con accuratezza.*

Soluzione. Valutando la serie nel punto $x = 1$ si ha

$$\begin{aligned}\sin 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

Siamo in presenza di una serie a segni alterni di cui sappiamo che l'errore che commettiamo troncando la serie al termine n-esimo è minore del valore assoluto del termine n+1-esimo. Allora se ci fermiamo al termine di ordine sette l'errore commesso è minore di $1/9! \approx 2.755731922 \times 10^{-6}$ cioè l'errore è sulla sesta cifra decimale. Il valore approssimato è

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} \approx 0.841468$$

Durante il corso di Analisi I è stato spesso fatto notare che non è sempre possibile calcolare una primitiva in forma chiusa e quindi usare il *Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale* per calcolare gli integrali definiti. Per esempio, non conosciamo la primitiva della funzione $\sin x^2$ e non possiamo quindi calcolare direttamente $\int_0^1 \sin x^2\, dx$. Ovviamente i metodi numeri, forniscono una possibilità di calcolo approssimato del valore dell'integrale. In particolare le serie di potenze, quando usabili, ci forniscono un metodo rapido ed efficiente.

Esempio 3.15 *Trovare un valore approssimato dell' integrale* $\int_0^1 \sin x^2\, dx$

Soluzione. La funzione $\sin x^2$ non ha una primitiva esprimibile in forma elementare, ma si può ragionare nel seguente modo. Poiché la serie di potenze che rappresenta la funzione $\sin x$ è data da

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$

serie di potenze che esprime $\sin x^2$ è

$$\sin x^2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\left(x^2\right)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{4k+2}}{(2k+1)!} = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \cdots ,$$

da cui si ricava

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin t^2\,dt &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\int_0^x t^{4k+2}\,dt\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{x^{4k+3}}{4k+3} = \frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\frac{x^{11}}{11\cdot 5!}-\frac{x^{15}}{15\cdot 7!}+\cdots .\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sin x^2\,dx &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{4k+3}\\ &= \frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}-\frac{1}{15\cdot 7!}+\cdots\end{aligned}$$

Valutando la somma dei primi quattro termini si ha

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{7\cdot 3!}+\frac{1}{11\cdot 5!}-\frac{1}{15\cdot 7!}\approx 0.3102681578$$

Poiché la serie è a segni alterni a termini monotoni decrescenti, il criterio di Liebnitz ci dice che l'errore, rispetto al valore vero, è inferiore al valore del termine successivo della serie che è

$$\frac{1}{19\cdot 9!}\approx 1.45\times 10^{-7}$$

L'errore commesso è allora di una unità sulla settima cifra decimale. ■

3.1.5 Uso dell'Algebra e del Calcolo Differenziale per la Determinazione di Nuove Serie

Il Teorema (3.12) permette, come abbiamo detto, di calcolare nuove serie a partire da quelle note. In particolare, derivare la serie di potenze della funzione $\sin x$ ci dà

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{d}{dx}\sin x = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{d}{dx}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots\end{aligned}$$

che, come la precedente, converge $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ancora, da

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

cambiando x in $-x$ si ha,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \; x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots ;$$

sostituendo x con x^2 si ottiene

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \; x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \cdots ;$$

l'integrazione nell'intervallo $[0, x]$ ci dà

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \; \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots$$

Ricordando che $\arctan 1 = \pi/4$ si può scrivere

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \; \frac{1}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

In realtà, nel fare questo passaggio, siamo andati oltre ciò che ci è permesso dalle proprietà note. Infatti ciò che sappiamo dallo sviluppo di $\dfrac{1}{1-x}$ è che l'intervallo di convergenza è $(-1, 1)$. Dimostrare che la serie di potenze che rappresenta $\arctan x$ converge anche per $x = 1$ è lasciato per esercizio.

Le serie di potenze convergenti possono anche essere moltiplicate tra loro, per formare nuove serie. Per quanto riguarda l'intervallo di convergenza si può dire che *il prodotto di due serie convergenti converge nell'insieme dove entrambe convergono.* Mostriamo con esempi come si può fare il prodotto tra serie, il prodotto cioè due infinità di termini.

Esempio 3.16 *Consideriamo le due serie*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$$

e

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \; x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots .$$

Sappiamo che entrambe le serie convergono in$(-1, 1)$. *Come si fa e cosa rappresenta il prodotto delle due serie?*

Soluzione. Il prodotto dei primi membri da come risultato $\dfrac{1}{1-x^2}$ che potremmo ricavare dalla serie che rappresenta $\dfrac{1}{1-x}$ sostituendo x con x^2 ed ottenendo così

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + \cdots$$

Il prodotto delle due serie date dovrà allora darci lo stesso risultato. Si ha

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} x^k \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \; x^k \\ = \; & \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots\right) \times \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots .\right) \end{aligned}$$

Quello che vorremmo fare è costruire una nuova serie $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \, x^k$ i cui coefficienti si ottengono mettendo a fattore tutti i prodotti che contengono elementi la cui somma degli indici è n. indichiamo con a_k i coefficienti della prima serie ($a_k = 1 \; \forall k$) e con b_k quelli della seconda $\left(b_k = (-1)^k\right)$.

I termini di ordine zero sono solo a_0 e b_0 da cui

$$c_0 = a_0 \cdot b_0 = 1 \times 1 = 1$$

I termine di ordine uno si ottengono moltiplicando i termini di ordine zero di una per i termini di ordine uno dell'altra, cioè

$$\begin{aligned} c_1 x &= a_0 \cdot .b_1 x + a_1 x \cdot \; b_0 = (a_0 \cdot .b_1 + a_1 \cdot \; b_0 a_0) \; x \\ &= 1 \cdot (-x) + x \cdot 1 = (-1 + 1) \; x = 0 \end{aligned}$$

I termini di ordine due della nuova serie si ottengono solo moltiplicando quelli di ordine zero per quelli di ordine due e quelli di ordine uno tra di loro, cioè

$$\begin{aligned} c_2 \, x^2 &= a_0 \cdot b_2 \, x^2 + a_1 x \cdot b_1 x + a_2 x^2 \cdot b_0 \\ &= (a_0 \cdot b_2 \; + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) \; x^2 = (1 - 1 + 1) \, x^2 = x^2 \end{aligned}$$

Si incomincia ad intravedere la regola che costruisce i coefficienti della serie prodotto

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i}$$

Si ottiene cioè il coefficiente di indice k sommando tra loro i prodotti dei coefficienti delle due serie le cui somme dei valori di indice da come risultato k

$$\begin{aligned} c_3 &= a_0\, b_3 + a_1\, b_2 + a_2\, b_1 + a_3\, b_0 \\ c_4 &= a_0\, b_4 + a_1\, b_3 + a_2\, b_2 + a_3\, b_1 + a_4\, b_0 \end{aligned}$$

Tornando al prodotto dell'esempio si vede che $c_{2k+1} = 0$, e $c_{2k} = 1$ da cui

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} x^k \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k \\ = & \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots\right) \times \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots .\right) \\ = & \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^{2k} \end{aligned}$$

La serie prodotto rappresenta, nell'intervallo $(-1, 1)$, la funzione $\dfrac{1}{1 - x^2}$. ■

Esempio 3.17 *Determinare la serie di potenze che rappresenta la funzione* $\ln(1 + x)$ *nell'intervallo* $(-1, 1)$. *Usare il risultato per calcolare* $\ln 1.5$ *con un errore minore di* 0.0001.

Soluzione. Sappiamo che la serie

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots .$$

converge nell'intervallo $(-1, 1)$. Integrando termine a termine nell'intervallo $[0, x]$ si ottiene

$$\begin{aligned} \ln(1 + x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} = dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x t^k\, dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots . = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, \frac{x^{k+1}}{k+1} \end{aligned}$$

che converge nell'intervallo $(-1,1)$ come la serie da cui deriva.
L'espressione trovata per la funzione $\ln(1+x)$ ci da

$$\ln 1.5 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(0.5)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(0.5)^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Per ottenere l'accuratezza desiderata l'errore deve essere inferiore a 0.0001, il che implica, poiché la serie è a segni alterni

$$\frac{(0.5)^{n+1}}{n+1} < 10^{-4}$$

Si può andare per tentativi, per esempio fermandosi per $n = 5$ si avrebbe $\frac{(0.5)^6}{6} \approx 2.6042 \times 10^{-3}$ e l'errore sarebbe maggiore della tolleranza richiesta; fermandosi per $n = 9$ si ha $\frac{(0.5)^{10}}{10} \approx 9.7656 \times 10^{-5}$, un errore minore di quello richiesto. Il valore approssimato del logaritmo è allora

$$\ln 1.5 \approx \sum_{k=1}^{9} (-1)^{k+1} \frac{(0.5)^k}{k} \approx 0.40553$$

e possiamo anche scrivere

$$0.40552 \leq \ln 1.5 \leq 0.40554$$

■

3.1.6 Un Atlante Sintetico delle Serie di Potenze

Si riporta qui di seguito un breve lista delle serie di potenze "più comuni" che può essere utile come riferimento, senza dover appesantire la memoria ricordando tutti i possibili sviluppi.

Una lista di serie di potenze

Funzione	**Serie**	**Intervallo di convergenza**
$\sin x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$(-\infty, +\infty)$
$\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$	$(-\infty, +\infty)$
$\exp x$	$\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$	$(-\infty, +\infty)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$	$(-1, 1)$
$\dfrac{1}{1+x}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$	$(-1, 1)$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$	$(-1, 1)$
$\arctan x$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$	$[-1, 1]$
$\ln(1+x)$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$	$(-1, 1)$

Nel paragrafo seguente cercheremo comunque di dare un metodo per costruire gli sviluppi date che siano le funzioni. Cercheremo, cioè di rispondere alle domande

Sotto quali condizioni una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è sviluppabile in serie di potenze ? Come si costruisce la serie di potenze che la rappresenta ?

3.1.7 Esercizi

1. Sia $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^k$

   (a) qual'è il raggio di convergenza della serie?

   (b) usando il teorema (3.12) si ha $f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,x^{k-1}}{2^k}$.
   Qual'è il suo raggio di convergenza?

   (c) usando il teorema (3.12) si ha $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)\,2^k}$.
   Qual'è il suo raggio di convergenza?

2. Usare lo sviluppo di $(1-x)^{-1}$ per ricavare la rappresentazione in serie delle seguenti funzioni.

   (a) $\frac{x^2}{1-x}$, $\frac{1}{1-x^2}$

   (b) $\frac{1}{(1+x)^2}$, $\frac{x}{1-x^4}$

3. Determinare la serie di potenze e il raggio di convergenza, per le seguenti funzioni. Usando il software disegnare il grafico della funzione ed il polinomio approssimante di grado cinque

   (a) $\arctan(2x)$

   (b) $x^2 \sin x$

   (c) $\cos(x^2)$

   (d) $\ln(1+\sqrt[3]{x})$

4. Usare lo sviluppo di e^x per calcolare il valore di $1/\sqrt{e}$ con un errore inferiore a $5 \cdot 10^{-2}$

5. Usare lo sviluppo in serie per calcolare $\int_0^{0.2} x\,e^{-x^3}dx$ con un errore inferiore a 10^{-5}

6. Calcolare esattamente il valore della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (**Suggerimento:** se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ allora $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1}$)

7. Usare le serie di potenze per mostrare che $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x - x)^3}{x\,(1-\cos x)^4} = \frac{2}{27}$

8. Mostrare che $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{(x\sin x)^{3/2}} = \dfrac{1}{6}$

9. Calcolare i seguenti limiti usando gli sviluppi in serie di potenze. Controllare il risultato usando la regola dell'Hospital o verificandoli con il software.

   (a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-\arctan x}{x^2}$

   (d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$

   (e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

10. Trovare le serie di potenze ed i raggi di convergenza per le seguenti funzioni

   (a) $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$, $f(x) = \ln(1+x^2)$

   (b) $f(x) = (x^2-1)\sin x$, $f(x) = \sin x + \cos x$

   (c) $f(x) = 2^x$, $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

   (d) $f(x) = \dfrac{5+x}{x^2+x-2} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{1}{x+2}$,

   (e) $f(x) = \sin^3 x = \dfrac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

11. Mostrare che $\dfrac{1}{x-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^k}$ se $|x| > 1$

12. Usare le serie di potenze per mostrare che $1-\cos x < \ln(1+x) < x$ per tutti gli x dell'intervallo $(0,1)$

13. Dire se convergono le seguenti serie

   (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$

   (b) $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\dfrac{1}{k}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-1/n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - e^{-1/n}\right)$

14. Sia r un numero fissato e definiamo una funzione f nel seguente modo

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n \stackrel{def}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{r}{n} x^n$$

(a) mostrare che la serie converge per $|x| < 1$

(b) mostrare che $(1+x)\, f'(x) = r\, f(x)$

(c) sia $g(x) = (1+x)^{-r}\, f(x)$. Mostrare che $g'(x) = 0$

(d) mostrare che la parte (c) implica che $f(x) = (1+x)^r$
[**Nota**: la serie di potenze per f è nota come **serie binomiale**]

3.2 Serie di Taylor e Mac Laurin

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come scrivere una funzione sotto forma di serie di potenze portasse ad alcuni vantaggi pratici. Abbiamo anche usato la serie di una funzione per costruirne altre usando l'algebra, il calcolo differenziale e integrale. Vogliamo adesso capire e determinare sotto quali condizioni una funzione è scrivibile sotto forma di serie di potenze.

Certamente tutto sarebbe più semplice se ogni funzione fosse descrivibile come serie di potenze ed il raggio di convergenza della serie coincidesse con il dominio di definizione delle funzioni stesse. Sfortunatamente non è così. Abbiamo già visto per esempio che la funzione $\ln(1+x)$ ammette come sviluppo $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$. Questa serie converge però solo nell'intervallo $(-1,1)$ mentre il dominio della funzione è l'intervallo $(-1,+\infty)$, oppure che la funzione $\dfrac{1}{1+x^2}$, definita su tutto $\mathbb{R}$ ammette uno sviluppo $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$ che converge solo per $|x|<1$.
Il Teorema (3.12) ci dice che ogni serie di potenze è differenziabile termine a termine quante volte si vuole mantenendo lo stesso intervallo di convergenza. Quindi ogni funzione che ammette serie di potenze deve essere differenziabile ripetutamente per $x=0$. Ne segue, per esempio, che la funzione $f(x)=|x|$ che è continua ma non derivabile per $x=0$ non può essere sviluppabile in serie di potenze nell'intorno di 0.

Consideriamo adesso la serie

$$S(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

e differenziamola ripetutamente. Si ha

$$S'(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k\, k\, x^{k-1}$$

$$S''(x)=\sum_{k=2}^{\infty} a_k\, k\, (k-1)\, x^{k-2}$$

$$S'''(x)=\sum_{k=3}^{\infty} a_k\, k\, (k-1)\, (k-2)\, x^{k-3}$$

$$S^{(4)}(x)=\sum_{k=4}^{\infty} a_k\, k\, (k-1)\, (k-2)\, (k-3)\, x^{k-4}$$

$$\vdots$$

Valutiamo tutte queste funzioni per $x = 0$, si ha

$$S(0) = a_0\,, \quad S'(0) = a_1\,, \quad = 2\,a_2\,, \quad S'''(0) = 2\cdot 3\,a_3\,, \quad S^{(4)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4\,a_4$$

Se ne ricava che:

$$\begin{array}{ccc}
a_0 = S(0) & & a_0 = \dfrac{S(0)}{0!} \\[2ex]
a_1 = S'(0) & & a_1 = \dfrac{S'(0)}{1!} \\[2ex]
a_2 = \dfrac{S''(0)}{2} & & a_2 = \dfrac{S''(0)}{2!} \\[2ex]
a_3 = \dfrac{S'''(0)}{2\cdot 3} & \Longleftrightarrow & a_3 = \dfrac{S'''(0)}{3!} \\[2ex]
a_4 = \dfrac{S^{(4)}(0)}{2\cdot 3\cdot 4} & & a_4 = \dfrac{S^{(4)}(0)}{4!} \\[2ex]
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

Se ne ricava una regola generale che possiamo scrivere nel seguente modo

Conclusione 3.18 *Se* $S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ *, allora è* $a_k = \dfrac{S^{(k)}(0)}{k!}$ *per tutti i valori dell'indice* $k \geq 0$.

Questo fatto importante lega tra di loro coefficienti dello sviluppo in serie e le derivate della funzione nel punto $x = 0$. Conoscendo le une si ricavano le altre.
Illustriamo il risultato con un esempio.

Esempio 3.19 *Assumiamo (per ora) che la funzione* $f(x) = \sin x$ *ammetta sviluppo in serie di potenze centrata nell'origine. Trovare tale serie.*

Soluzione. Vogliamo costruire una serie della forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ che rappresenti la funzione. Per fare questo bisogna conoscere i coefficienti a_k. La conclusione precedente ci dice che $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, dobbiamo perciò derivare ripetutamente la funzione $\sin x$ e valutare le derivate in $x = 0$. Si ha

$$a_0 = \frac{f(0)}{0!} = \sin 0 = 0 \qquad a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = \left.\frac{\cos x}{1!}\right|_{x=0} = 1$$
$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \left.\frac{-\sin x}{2!}\right|_{x=0} = 0 \qquad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!} = \left.\frac{-\cos x}{3!}\right|_{x=0} = \frac{-1}{3!}$$
$$a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \left.\frac{\sin x}{4!}\right|_{x=0} = 0 \qquad a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{5!} = \left.\frac{\cos x}{5!}\right|_{x=0} = \frac{1}{5!}$$

Si nota immediatamente che i coefficienti di indice pari sono tutti nulli $(a_{2k} = 0)$ mentre quelli di indice dispari sono a segni alterni del tipo $\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!}$.
Si può allora scrivere

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Non è difficile vedere che la serie converge assolutamente per tutti gli $x \in \mathbb{R}$.

Serie di MacLaurin: Sviluppo Intorno ad $x = 0$

Usando la Conclusione precedente come ricetta per la costruzione dei coefficienti, possiamo scrivere una serie di potenze per ogni funzione che sia ripetutamente derivabile per $x = 0$. Riportiamo qui sotto la definizione formale che porta il nome del matematico scozzese Colin MacLaurin (17° Secolo)

Definizione 3.20 ***(Serie di MacLaurin)*** *Sia f una funzione infinitamente derivabile per $x = 0$. La **serie di MacLaurin** di f è definita come la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dove i coefficienti a_k sono dati da*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

NOTA: Rimane aperto il problema di sapere se e dove converge la serie così costruita.

Serie di Taylor: Sviluppo Intorno ad $x = a$

Una serie di MacLaurin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

si dice **centrata** in $x = 0$ perché tutte le derivate di f sono calcolate in quel punto.
Questa scelta, sebbene conveniente, non è obbligatoria. Una serie del tutto simile può essere trovata sviluppando intorno ad un generico punto $x = a$ purché la funzione f ammetta derivate di ogni ordine nel punto. L'espressione generica di tale serie è detta **serie di Taylor** di f intorno ad $x = a$, e si esprime nella forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

In alcuni casi, lo sviluppo intorno ad un punto diverso dallo zero è conveniente. Si nota, infine, che la serie di MacLaurin può essere considerata come un caso particolare della serie di Taylor, quando $a = 0$.

Esempio 3.21 *Consideriamo la funzione* $f(x) = \ln(x)$*. Scrivere lo sviluppo di* f *intorno ad* $x = 1$.

Soluzione. Cominciamo col calcolare le derivate della funzione $\ln x$ cercando di trovare una regola generale (se c'è) che ci dica come varia il valore della derivata per $x = 1$. Si ha

$$\begin{array}{lll} f'(x) = \dfrac{1}{x} & f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} & f'''(x) = \dfrac{2}{x^3} \\ f^{(4)}(x) = -\dfrac{2\cdot 3}{x^4} & f^{(5)}(x) = \dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5} & f^{(6)}(x) = -\dfrac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{x^6} \end{array}$$

Valutiamo le derivate per $x = 1$:

$$\begin{array}{lll} f'(1) = 1 & f''(1) = -1 & f'''(1) = 2 \\ f^{(4)}(1) = -2\cdot 3 & f^{(5)}(1) = 2\cdot 3\cdot 4 & f^{(6)}(1) = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 \end{array}$$

E' chiaro che $f(1) = 0$ e che le derivate, a partire dall'indice $k = 1$, sono a segni alterni e che il loro valore è dato da

$$f^{(k)}(1) = (-1)^{k+1} (k-1)!$$

La serie ha allora la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x-1)^k$$
$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots$$

- Tutto il problema di costruzione della serie è quindi legato alla conoscenza delle derivate della funzione in zero. Il processo di derivazione non è sempre semplice e piano, fortunatamente *Maple* e gli altri pacchetti software possono aiutarci a trovare le somme parziali in modo semplice attraverso l'uso del seguente comando:

  > `taylor(f(x), x=a, n);`

  `f(x)` è l'espressione a funzione che si vuole sviluppare, `x=a` è il punto intorno al quale si vuole lo sviluppo, `n` è l'ordine dell'errore al quale si vuole il troncamento.
  Per esempio, con il comando:

  >`taylor(sin(x), x=0, 7)`; si ottiene come risposta

  $$x - 1/6x^3 + 1/120x^5 + O(x^7)\,.$$

  NOTA: nelle versioni precedenti alla versione 5 il comando non era `taylor` bensì `taylorpoli`
  Un comando equivalente è:

  >`series(f((x), x=a, n)`, l'elemento `n` indica quanti elementi della serie si richiedono. Esso è opzionale, il non indicarlo implica una risposta di default di ordine 6.

Convergenza della Serie di Taylor

Abbiamo visto che per ogni funzione che sia derivabile infinite volte in un punto $x = a$, è possibile scrivere una serie del tipo $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. Di questa serie è possibile valutare il raggio di convergenza usando una delle tecniche che abbiamo sviluppato. Rimane un problema, sapere qual'è la funzione a cui converge la serie costruita.

La risposta a questo problema fu data da Taylor nel seguente teorema

Teorema 3.22 ***(Teorema di Taylor)*** *Supponiamo che la funzione f sia infinitamente differenziabile su di un intervallo I contenente il punto $x = a$. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ la serie di Taylor centrata in $x = a$, e sia*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

il polinomio approssimante di grado n .
Supponiamo inoltre che per tutti gli $x \in I$ si abbia

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq K_{n+1}\,.$$

Si ha allora

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{K_{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \ .$$

Notiamo le seguenti proprietà del teorema.

- Il teorema stima l'errore commesso sostituendo $P_n(x)$ ad $f(x)$. A meno che K_{n+1} cresca molto velocemente con n l'errore tende a 0 quando $n \to \infty$ e quindi la serie converge a $f(x)$.
- Il teorema usa solo elementi noti e l'errore d'approssimazione dipende solo dal comportamento della derivata di ordine più alto.
- Non faremo la dimostrazione del teorema. L'essenza di essa è comunque basata essenzialmente sul teorema del valor medio.

Esempio 3.23 *Sia* $f(x) = \sin x$. *Mostrare che la serie di MacLaurin converge a* $\sin x$ *per ogni valore di* x.

Soluzione. Le derivate della funzione $\sin x$ sono tutte (a parte il segno) $\sin x$ o $\cos x$, si ha allora che

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Il teorema di Taylor ci dice allora che

$$|P_n(x) - \sin x| \leq \frac{1 \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \to_{n\to\infty} 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

cioè la serie converge alla funzione per ogni valore di x.
Il seguente grafico

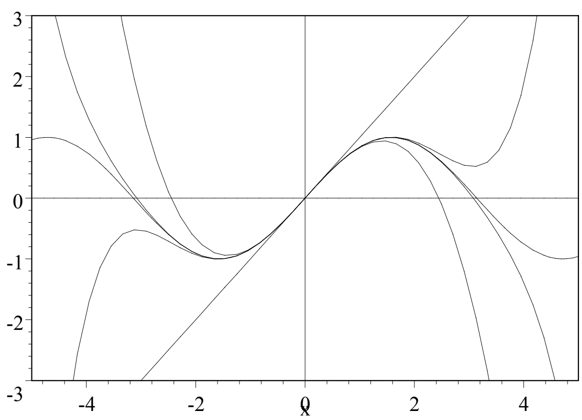


Grafico di $\sin x$, $P_1(x), P_3(x), P_5(x), P_7(x)$

da una idea di come i polinomi approssimino la funzione $\sin x$.

3.2.1 Esercizi.

1. Sia $f(x) = x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 2x + 1$
   (a) trovare lo sviluppo di MacLaurin di f
   (b) trovare lo sviluppo di Taylor di centro $x = 3$

2. Sia $p(x) = (1+x)^n$, dove n è un intero positivo. Spiegare perché lo sviluppo di MacLaurin di p è p stesso.

3. Sia $f(x) = \int_3^x \sqrt{t}\, e^{-t}\, dt$.
   (a) mostrare che se $x \approx 3$ allora è:
   $f(x) \approx \sqrt{3}\, e^{-3}\,(x-3) - \frac{5}{12}\sqrt{3}\, e^{-3}\,(x-3)^2 + \frac{23}{216}\sqrt{3}\, e^{-3}\,(x-3)^3$
   (b) dire di che ordine di grandezza è l'errore che si commette quando $f(3.5)$ è stimata usando il polinomio in (a)

4. Sia $f(x) = \sqrt{1+x}$.
   (a) trovare i primi tre termini non nulli dello sviluppo di MacLaurin
   (b) dire di che ordine di grandezza è l'errore che si commette quando $f(1)$ è stimata usando il polinomio in (a)

5. Dire perché la serie $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^2}$ non può essere lo sviluppo di MacLaurin della funzione f il cui grafico è

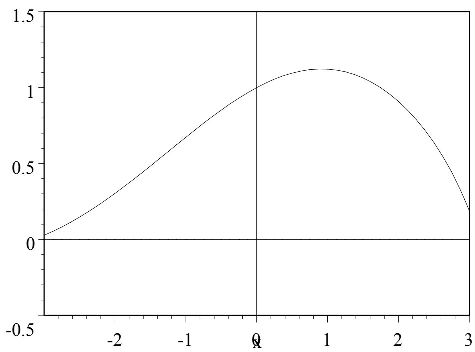


Grafico di f

6. Data funzione $f(x) = \sqrt{1+x}$

(a) Scrivere il polinomio di MacLaurin di ordine due per f

(b) il potenziale elettrico V a distanza r sulla perpendicolare di un disco di raggio a avente carica uniforme di densità δ è

$$V = 2\pi\delta\left(\sqrt{r^2 + a^2} - r\right)$$

Se r è grande rispetto ad a, allora $a/r \approx 0$. Usare (a) per trovare un'approssimazione per V.

7. Sia f una funzione tale che $f(0) = 1$ e $f'(x) = 1 + (f(x))^{10}$. Trovare i primi quattro termini dello sviluppo di MacLaurin per f.

8. Supponiamo che f sia positiva, crescente e concava nell'intervallo $[-2, 2]$

   (a) qual'è il segno del coefficiente di x^2 nella serie di MacLaurin di f ? Giustificare la risposta

   (b) sia $g(x) = 1/\sqrt{1 + f(x)}$, qual'è il segno del coefficiente di x^2 nella serie di MacLaurin di g ? Giustificare la risposta

9. Data la funzione $\dfrac{1}{2+x}$

   (a) trovare lo sviluppo di MacLaurin

   (b) trovare $f^{(259)}(0)$ esattamente.

10. Sia $f(x) = \dfrac{x}{1-x^3}$

    (a) trovare lo sviluppo di MacLaurin di f

    (b) trovare il raggio di convergenza della serie trovata in (a)

    (c) usare (a) per trovare lo sviluppo di $f''(x)$

    (d) usare (a) per trovare lo sviluppo di $\int_0^x f(t)\,dt$

11. Sia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & se \quad x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & se \quad x = 0 \end{cases}.$$

Valutare $f^{(100)}(0)$

12. Sia

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2} & se \quad x\neq 0 \\ 0 & se \quad x=0 \end{cases}$$

   (a) Usare la definizione di derivata (e la regola dell'Hospital) per mostrare che $f'(0)=0$
   (b) Usando (a) mostrare che $f^{(k)}(0)=0\ \forall k\geq 0$ e scrivere la formula di MacLaurin per f
   (c) Qual'è il raggio di convergenza della serie di (b) ?
   (d) Per quali valori di x la serie converge ad $f(x)$?

13. Usare la serie binomiale per mostrare

   (a) che

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \\ &= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\cdots}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

   (b) se $n\geq 1$ è un intero, allora

$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}x\,dx=\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\cdots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}\,.$$

   Usare questo fatto per calcolare

$$\int_0^1\frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

   (c) usare (a) e (b) per mostrare che

$$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$$

   (d) usare la sostituzione $u=\arcsin x$ per mostrare che

$$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\frac{\pi^2}{8}$$

(e) usare (c) e (d) per mostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$$

14. Sia f una funzione che ammette derivate continue su un intervallo contenente i punti a ed x

(a) spiegare perché $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\, dt$

(b) usando (a) e l'integrazione per parti, mostrare che

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) - \int_a^x (t-x)\, f''(t)\, dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)\, f''(t)\, dt \end{aligned}$$

[**suggerimento**: porre $dv = dt$ e $v = t - x$ (questo è legittimo perché x non è la variabile di integrazione)]

(c) usare (b) e l'integrazione per parti per mostrare che

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{2}\int_a^x (x-t)^2\, f'''(t)\, dt$$

(d) usare (c) e mostrare che ripetute integrazioni per parti portano a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(a)\,(x-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Iniziare al caso $n = 3$.

15. Sia $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt$ (questo termine viene chiamato **resto di Taylor in forma integrale**).

Mostrare che se $a = 0$ e $\left| f^{(n+1)}(t)\right| \leq K_{n+1}$ per tutti i valori di t, allora si ha

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| \leq \frac{K_{n+1}}{(n+1)!}\, |x|^{n+1}\, .$$