Capitolo 2

Funzioni Elementari

Una **funzione elementare** si costruisce, usando operazioni lecite, a partire da alcuni elementi base. Così, per esempio, la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{\log(2x)}{1+3\,x^4}\right)$$

è elementare perché è costruita (usando addizione, divisione, composizione, etc.) a partire da alcune elementi base come le funzione seno e logaritmo, le potenze di x e le costanti.

Nonostante il loro nome, le funzioni elementari non sono sempre banali da studiare e da analizzare. A partire dagli elementi base si possono costruire una grande varietà di funzioni.

Possiamo dividere gli elementi, che ci servono a costruire le funzioni elementari, in alcune grandi famiglie, le tre più note sono:

- **funzioni algebriche**. Esse contemplano solo operazioni di tipo algebrico del tipo

$$f(x) = x^2 + \frac{6}{x}\,, \quad g(x) = \frac{x^3+1}{3+\sqrt{x}}$$

- **funzioni esponenziali e logaritmi**. Le operazioni coinvolte sono solo esponenziali e logaritmi con varie basi

$$h(x) = 2^x\,, \;\; l(x) = e^x\,, \;\; m(x) = \log_2 x\,, \;\; n(x) = \ln x$$

- **funzioni trigonometriche.** Le funzioni seno, coseno, tangente, insieme a secante, cosecante, cotangente, etc., fanno parte di questa famiglia.

A partire da queste, accoppiandole opportunamente, si ottiene la vasta famiglia delle funzioni elementari. Come si combinano le funzioni, quali siano le regole lecite, come studiarle è uno degli scopi di questo corso.

2.1 Funzioni Algebriche

Una funzione algebrica la si ottiene usando, nel costruirla, solo operazioni algebriche quali, somma, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ed estrazione di radici.

2.1.1 Polinomi

I polinomi sono le funzioni algebriche più semplici, la loro costruzione richiede solo le operazioni di somma e moltiplicazione.

Definizione 22 *Un* ***polinomio*** *in x è un'espressione della forma*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

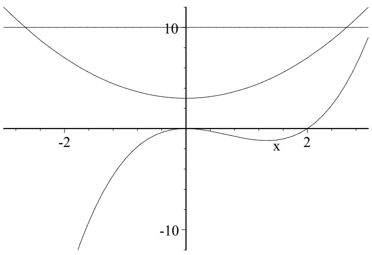
cioè la somma di costanti moltiplicate per potenze della variabile x.

Esempio 23 *Le espressioni* $5x + 2\,,\ -3x + x^{19},\ (x-1)\left(\pi\, x^7 + 5\right)$ *sono polinomi in x. Nessuna delle espressioni seguenti lo è:* $3 + \dfrac{1}{x},\ \sqrt[3]{x}\,,\ \dfrac{x-1}{\pi\, x^7 + 5}$.

Polinomi come Funzioni. All'espressione polinomiale $2x^3 + 5x$ corrisponde in modo naturale la funzione $p(x) = 2x^3 + 5x$. In pratica, la distinzione tecnica tra *polinomio* e *funzione polinomiale* poco importa, useremo i due termini in modo intercambiabile.

Dominio e Rango. Poiché i polinomi coinvolgono solo somme e moltiplicazioni, essi accettano come ingressi tutti i numeri reali. In altre parole, ogni polinomio ha lo stesso dominio naturale: l'insieme dei numeri reali.

Il loro *rango* varia drasticamente. Il rango di $p(x) = 10$ è $\{10\}$, un insieme con un solo elemento. Per contrasto, il rango di $q(x) = x^2 + 3$ è l'intervallo $[3, +\infty)$. Il grafico di $r(x) = x^3 - 2x^2$ è meno decifrabile direttamente dalla formula, proviamo allora a controllare il grafico. Ecco, insieme, i grafici di p, q, e r.



I grafici di $p(x)\,,\ q(x)\,,\ r(x)$

Disegnando il grafico di r in una finestra più ampia lo si vedrebbe più chiaramente.

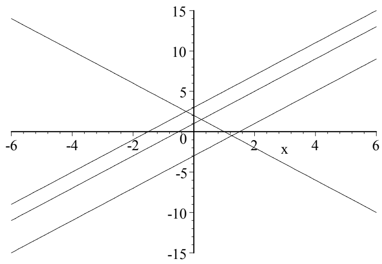
Il grafico ci suggerisce che $r(x)$ (qual'è dei tre?) sale senza limitazione (tende a $+\infty$) quando $x \to +\infty$, mentre tende a $-\infty$ quando $x \to -\infty$. L'impressione è corretta: *per ogni polinomio, il termine di maggior potenza in x determina ciò che accade quando x tende a più o meno infinito* (nel caso di $r(x)$ il termine x^3 "domina"). Ne consegue che $r(x)$ assume *tutti* i valori reali ed il suo rango è $(-\infty, +\infty)$.

Funzioni Lineari

I polinomi più semplici sono le costanti, come $p(x) = 10$. I polinomi più semplici ed interessanti sono le **funzioni lineari**, polinomi che coinvolgono al più la prima potenza di x. Ognuna delle seguenti definisce una funzione lineare

$$l_1(x) = 2x + 3 \qquad l_2(x) = 2(x - 3) + 3$$
$$l_3(x) = 2x + 1 \qquad l_4(x) = -2x + 2$$

I grafici delle funzioni lineari sono ovviamente delle rette

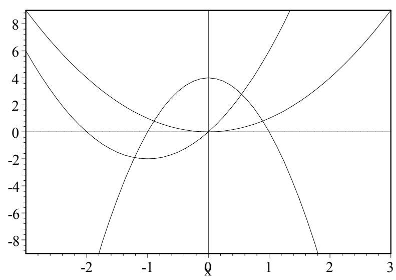


I grafici di $l_1,\ l_2,\ l_3,\ l_4$

Quadratiche e Cubiche

I grafici dei polinomi **quadratici** e **cubici,** quelli cioè di grado 2 e 3 rispettivamente, hanno forme standard, chiamate **parabole** e **curve cubiche**. Eccone alcuni esempi

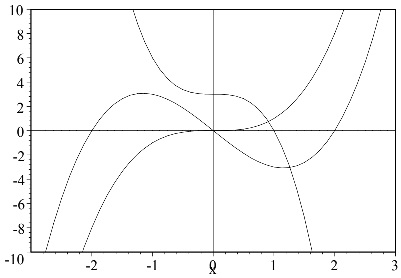
Come si riconoscono tra loro?



Tre quadratiche: $q_1(x) = x^2$, $q_2(x) = -4x^2 + 4$, $q_3(x) = 2x(x + 2)$.

Qui di seguito tre cubiche:

Come si riconoscono tra loro?



Tre cubiche: $c_1(x) = x^3$,
$c_2(x) = -3x^3 + 3$, $c_3(x) = x(x-2)(x+2)$

Polinomi in Generale: Molte e Diverse Forme

I grafici dei polinomi lineari, quadratici e cubici (polinomi di primo, secondo e terzo grado) hanno forme definite, ma in generale i grafici dei polinomi possono assumere qualsiasi forma purché non spigolosa ed ininterrotta. Alcune restrizioni ci sono, per esempio, *un polinomio di grado n può avere al più n radici*; questo graficamente significa che il grafico di un polinomio di grado n può intercettare l'asse delle x al più n-volte (in particolare, una funzione polinomiale non può essere periodica).

2.1.2 Funzioni razionali

Sommare o moltiplicare tra di loro polinomi da luogo ad un altro polinomio. Dividere due polinomi non dà (in generale) luogo ad un altro polinomio; il risultato è una funzione razionale.

Definizione 24 *Una* ***funzione razionale*** *è una funzione la cui legge può essere scritta come quoziente di due polinomi.*

Esempio 25 *Ognuna delle seguenti funzioni è una funzione razionale:*

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+3}, \quad h(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x+2}$$

La funzione $m(x) = \sqrt{x}$ non è razionale, poiché coinvolge una potenza frazionale di x.

La funzione $h(x)$ può destare perplessità. E' certamente la somma di due funzioni razionali, ma è razionale? La risposta è positiva poiché si può riscrivere $h(x)$ nella forma

$$h(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{x+2} = \frac{2\,(x+2)+4\,x}{x\,(x+2)} = \frac{6\,x+4}{x\,(x+2)}$$

■

Le funzioni razionali, al contrario dei polinomi hanno una nuova importante proprietà: la possibilità di avere **asintoti orizzontali** e **verticali.**

Esempio 26 *Consideriamo la funzioni razionale*

$$r(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$$

ed il suo grafico

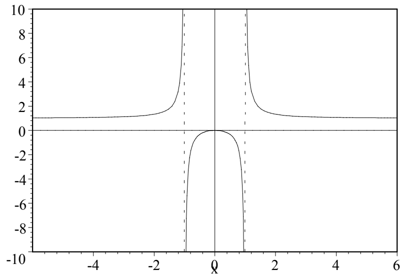


Grafico di $\frac{x^2}{x^2-1}$

Gli **asintoti** sono rette verso le quali "al limite" il grafico tende. Studieremo asintoti e le loro relazioni con i limiti nel capitolo seguente. A parte le considerazioni tecniche, è chiaro che il grafico di r ha tre asintoti: le rette verticali $x = -1$ e $x = 1$ e la retta orizzontale $y = 1$. Da dove provengano gli asintoti verticali è chiaro: essi corrispondono alle radici del denominatore ▶ L'*asintoto orizzontale* (la retta $y = 1$) riflette il comportamento di r "nel lungo periodo". Mostra il comportamento di r per grandi valori (positivi o negativi) della variabile indipendente x. In questo caso, l'asintoto mostra che $r(x)$ tende al valore 1 quando x tende a più o meno infinito. Lavorando algebricamente sulla formula per r si ha

E' ovvio aspettarsi problemi quando il denominatore si annulla. Può essere meno ovvio capire il comportamento dalla formula.

$$r(x) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{\left(x^2-1\right)+1}{x^2-1} = 1 - \frac{1}{x^2-1}$$

Quando x tende all'infinito $\frac{1}{x^2-1}$ rimane positivo ma tende a 0 ; per cui $r(x)$ tende ad 1 dal di sopra (per valori maggiori di 1). Se tabuliamo i valori di r per valori dell'ingresso grandi in valore assoluto otteniamo un informazione dello stesso tipo

Valori di $r(x)$ per "grandi valori" di x					
x	10	100	1000	10000	$\cdots$
$r(x)$	1.01010101	1.00010001	1.00000100	1.00000001	$\cdots$
x	-10	-100	-1000	-10000	$\cdots$
$r(x)$	1.01010101	1.00010001	1.00000100	1.00000001	$\cdots$

Altre Funzioni Algebriche

I polinomi e le funzioni razionali coinvolgono solo le operazioni algebriche standard: addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed elevamento a potenza intera. Queste non solo le uniche funzioni algebriche; "altre" funzioni algebriche sono ad esempio:

$$f(x) = \sqrt{x}\,,\ g(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}\,,\ h(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x^2+1} + x^{4/5}}$$

che coinvolgono radici "n-esime" della variabile x.

Nuovi problemi si pongono quando si considera questo "nuovo" tipo di funzioni algebriche. Calcolare, ad esempio, con una certa accuratezza, il valore di $f(2) = \sqrt{2}$ senza l'aiuto dei mezzi elettronici, non è banale.

2.2 Funzioni Esponenziali e Logaritmiche

Le funzioni esponenziali e logaritmiche sono tra le più importanti e pratiche. Capire proprietà e comportamento di queste funzioni richiede, prima di tutto, una buona familiarità con l'algebra dei logaritmi e degli esponenziali, che si consiglia di rivedere sui testi della scuola media superiore.

Come sono collegati tra loro logaritmi ed esponenziali.

Dato un numero positivo $b \neq 1$ (**base**) *e due numeri reali* x *ed* y *è*

$$y = \log_b x \iff x = b^y$$

Questa relazione tra esponenziali e logaritmi è cruciale per capire entrambi i tipi di funzioni. In particolare, useremo questa proprietà per *definire* le funzioni logaritmiche a partire da quelle esponenziali.

Ricordiamo qui alcune delle proprietà fondamentali spesso usate

$$\begin{array}{rclrcl} b^x b^y & = & b^{x+y}\,; & (b^x)^y & = & b^{x\,y}\,; \\ \log_b x\,y & = & \log_b x + \log_b y & \log_b (x)^y & = & y \log_b x\,. \end{array}$$

NOTA In ogni riga, b deve essere positivo (nella seconda $\neq 1$). Nella riga superiore x e y possono prendere qualsiasi valore. Nella seconda riga, x ed y devono essere positivi.

2.2.1 Funzioni Esponenziali

Definizione 27 *Una **funzione esponenziale** è definita da una espressione della forma*

$$f(x) = b^x$$

dove b, ***la base***, *è un numero positivo fissato* $(b > 0)$.

Ognuna delle espressioni

$$2^x,\ 4^t,\ \left(\frac{1}{2}\right)^z,\ e^x$$

definisce una funzione esponenziale (la base è fissata, l'esponente varia).

Base e.

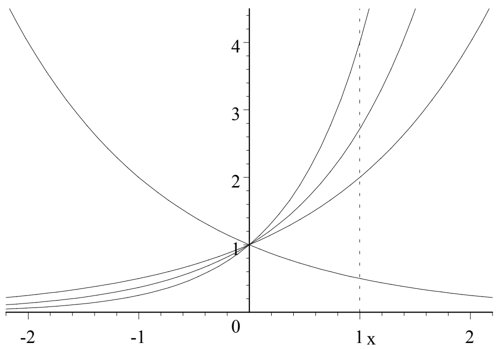
Tra tutte le funzioni esponenziali quella che ha come base il numero e ($e = 2,718121828...$) si rivela utile e conveniente in modo particolare (il fatto, ad esempio, che e sia la base di default di tutti i calcolatori scientifici ne rivela la particolare importanza).

Il numero e è irrazionale; cosa lo rende così speciale sarà chiaro più avanti, quando si studieranno le derivate delle funzioni.

La funzione $f(x) = e^x$ di base e, è spesso chiamata **la funzione esponenziale**, o a volte **la funzione esponenziale naturale**. Notazioni alternative della stessa funzioni sono anche

$$\exp(x)\ ,\ \exp x$$

Grafici di funzioni esponenziali. Sono disegnati qui sotto i grafici delle funzioni esponenziali $(1/2)^x$, 2^x, e^x, 4^x. Da notare, in particolare, i valori delle funzioni per $x = 0$ e per $x = 1$.



Funzioni esponenziali con basi $1/2,\ 2,\ e,\ 4$

Nota 28 ***Basi.*** *Se $b > 0$ l'espressione b^x ha senso per tutti i valori reali di x. Quindi ogni numero positivo b definisce una funzione esponenziale (in pratica i più usati sono $b = 2,\ e,\ 10$).*

Dominio e Rango*. Le funzioni esponenziali accettano come input ogni numero reale, così il loro dominio è $(-\infty, +\infty)$. I grafici ci dicono che a meno del caso $b = 1$, il rango della funzione è $(0, +\infty)$.*

Forma*. La forma del grafico di una funzione esponenziale dipende dalla base b. Più grande è il valore di $b > 1$ più velocemente b^x cresce (se $b < 1$ la funzione decresce, se $b = 1$ la funzione è costante).*

Punto in comune*. Tutti i grafici delle funzioni $f(x) = b^x$ passano per il punto $(0, 1)$ cioè $f(0) = b^0 = 1$. Inoltre si ha che il grafico passa per il punto $(1, b)$ cioè $f(1) = b^1 = b$.*

Monotonia*. Le funzioni esponenziali sono* ***monotone****, cioè non crescenti o non decrescenti. In particolare, se $b > 1$ il grafico di b^x è crescente. Se $0 < b < 1$ il grafico di b^x è decrescente.* ▶

Cosa accade per $b = 1$?

Sempre più velocemente. *Forse, la proprietà più importante delle funzioni esponenziali è quella legata al loro tasso di variazione:*

Se $y = b^x$, allora il tasso di variazione di yè proporzionale ad y stesso.

2.2.2 Funzioni Logaritmiche

Le funzioni esponenziali e logaritmiche possono essere considerate “accoppiate” nel senso che *ad una funzione esponenziale di base $b \neq 1$ corrisponde una funzione logaritmo con la stessa base.* La seguente tavola collega insieme i valori di una tale coppia nel caso di $b = 2$ ▶

Notare la immetria “a pecchio” della avola.

Valori delle funzioni esponenziali e logaritmiche

Valori di 2^x

x	-2	-1	0	1	2	3	10	13, 28771
2^x	1/4	1/2	1	2	4	8	1204	10.000

Valori di $\log_2 x$

x	1/4	1/2	1	2	4	8	1024	10.000
$\log_2 x$	-2	-1	0	1	2	3	10	13.28771

La definizione formale rende la corrispondenza tra logaritmi ed esponenziali più precisa:

Definizione 29 *La **funzione logaritmo di base** b, indicata da*

$$f(x) = \log_b x$$

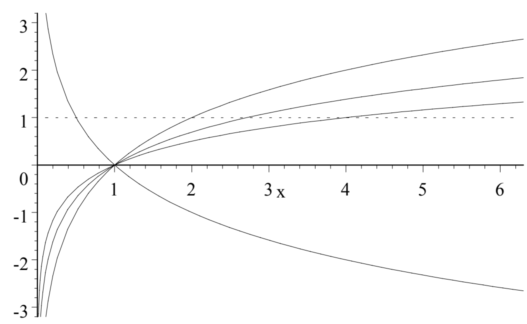
è definita dalla condizione

$$y = \log_b x \iff b^y = x\,.$$

Ognuna delle espressioni $\log_2 x$, $\log_4 x$, $\log_{1/2} x$, $\log_e x$ definisce una funzione logaritmo. La funzione che ha come base $b = e$ è chiamata **funzione logaritmo naturale;** nella stampa e nei calcolatori è normalmente indicata con la notazione

$$\ln(x) \quad \text{o} \quad \ln x\,.$$

Grafici delle funzioni logaritmiche. Riportiamo qui di seguito i grafici di funzioni logaritmiche con le stesse basi delle funzioni esponenziali disegnate prima



Funzioni logaritmo con basi $1/2, 2, e, 4$

Non sorprende il fatto che i grafici delle funzioni logaritmo riflettano quelli analoghi delle funzioni esponenziali.

Nota 30 ***Basi*** *Ogni numero positivo $b \neq 1$ può essere usato come base per le funzioni logaritmo (Perché non $b = 1$?) (in pratica come per gli esponenziali $b = 2,\ b = e,\ b = 10$ sono i più usati ed utili).*
Dominio e Rango *I grafici mostrano che per valori ammissibili di b le funzioni logaritmo accettano come input valori positivi della variabile x mentre le uscite possono assumere tutti i valori reali. Quindi, per ogni funzione logaritmo si ha $(0, +\infty)$ come dominio e $(-\infty, +\infty)$ come rango.*
Tasso di Variazione *Così come per le funzioni esponenziali, la forma di ogni grafico dipende dalla scelta della base b. Questa volta, maggiore è il valore di b più lenta è la crescita del grafico della funzione (se $b < 1$ il grafico decresce). Il grafico di una funzione esponenziale cresce sempre più rapidamente al crescere di x, il grafico delle funzioni logaritmo ha la proprietà opposta: cresce sempre più lentamente al crescere della variabile x.*
Un Punto in Comune *Il grafico di ogni funzione logaritmo passa attraverso il punto $(1, 0)$, cioè se $f(x) = \log_b x$ allora $f(1) = \log_b 1 = 0$.*
In modo simile, si ha che per ogni valore di b ammissibile è $f(b) = \log_b b = 1$
Monotonia *Ogni funzione logaritmo è strettamente monotona. Se $b > 1$ il grafico di $f(x)$ è crescente. Se $0 < b < 1$ il grafico è decrescente.*

Funzioni Esponenziali e Logaritmiche come Inverse

La condizione

$$y = \log_b x \iff x = b^y$$

implica che le funzioni esponenziali e logaritmiche con la stessa base sono una l'inversa dell'altra ▶

Rivedremo l'idea di funzione inversa nel prossimo paragrafo.

Esempio 31 *Per ogni base b le funzioni $f(x) = b^x$ e $g(x) = \log_b x$ sono funzioni inverse. Che cosa significa questo se $b = 10$ e $x = 100$? Che cosa se $x = 5$?*

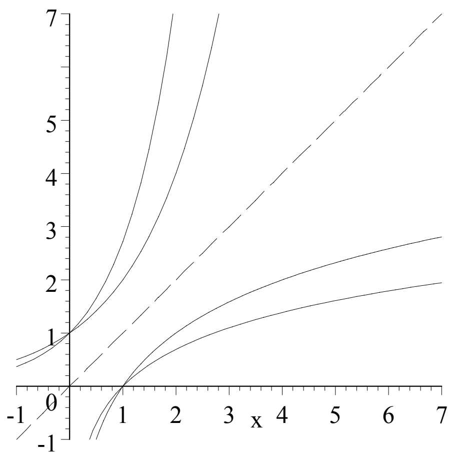
Risposta Che per la base $b = 10$ funzione esponenziale e logaritmo siano l'una l'inversa dell'altra significa che $y = \log_{10} x \iff x = 10^y$. Per $x = 100$ la relazione precedente ci dice che

$$y = \log_{10} 100 \iff 100 = 10^y$$

Poiché la seconda uguaglianza vale solo per $y = 2$ ne segue che $\log_{10} 100 = 2$.

Cosa accade per $x = 5$? Usando un qualsiasi calcolatore sappiamo che $\log_{10} 5 \approx 0.6989700043$. In questo contesto la proprietà inversa ci dice che $5 \approx 10^{0.6989700043}$. Provate a controllare con il calcolatore. ∎

Funzioni Inverse: il punto di vista grafico Consideriamo come basi i valori e e 2. Le funzioni $\ln x$ e $\log_2 x$ sono le inverse di e^x e 2^x rispettivamente. Il grafico seguente mostra cosa significa questo da un punto di vista geometrico



Le funzioni esponenziali e logaritmiche sono inverse tra loro

(Determinare quali sono i grafici delle funzioni esponenziali, quali quelli delle funzioni logaritmiche).

I grafici delle funzioni inverse sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$. In particolare è da notare che nei punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$ i grafici di $\ln x$ e di e^x sono paralleli tra loro e alla retta $y = x$. Gli altri due grafici non hanno la stessa proprietà. Al momento questa particolarità può sembrare non importante, ma vedremo presto come sia sorprendentemente utile.

Nota 32 *Logaritmi o esponenziali: quali i più semplici? L'equazione*

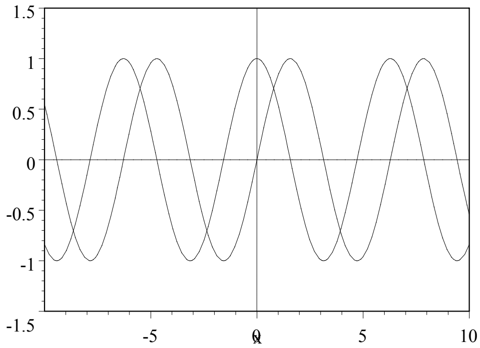
$$y = \log_b x \iff x = b^y$$

può essere usata per definire la funzione $\log_b x$ *in termini della funzione intuitivamente più semplice* b^x*.Per vedere che* $\log_4 1.38703096913 \approx 0.236$ *potremmo verificare che* $4^{0.236} \approx 1.38703096913$
Questo approccio al logaritmo è sensato? E' vero che gli esponenziali sono più semplici delle funzioni logaritmo? In senso strettamente logico: NO. La conoscenza dell'una implica la conoscenza dell'altra. Intuitivamente, tuttavia, il calcolare l'esponenziale è più semplice che trovare il logaritmo, così come fare il quadrato è più semplice che fare la radice quadrata.
Definire i logaritmi tramite gli esponenziali non è l'unica possibilità. La strategia opposta (definire i logaritmi senza fare cenno agli esponenziali e poi attraverso questi gli esponenziali) è a volte usata.

2.3 Funzioni Trigonometriche

In geometria, il seno, il coseno, la tangente ed altre quantità trigonometriche vengono definite come rapporto tra i lati di un triangolo rettangolo. Il nostro punto di vista è diverso. Studiamo seno, coseno e le altre quantità trigonometriche come funzioni e la connessione con le proprietà dei triangoli sarà solo occasionale.

La più importante proprietà delle funzioni trigonometriche - seno, coseno, tangente e così via - è il loro comportamento ripetitivo che chiameremo **periodico**. La forma ondulata dei grafici delle funzioni seno e coseno riflettono il loro carattere a forma di onda



I grafici di $y = \sin x$ e $y = \cos x$

Come sempre, la finestra del grafico mostra solo una parte del grafico. In questo caso ciò che mostra è sufficiente: il grafico completo delle funzioni seno e coseno ripete la stessa forma infinite volte.

Rimane il problema di capire come definiamo in analisi le funzioni trigonometriche.

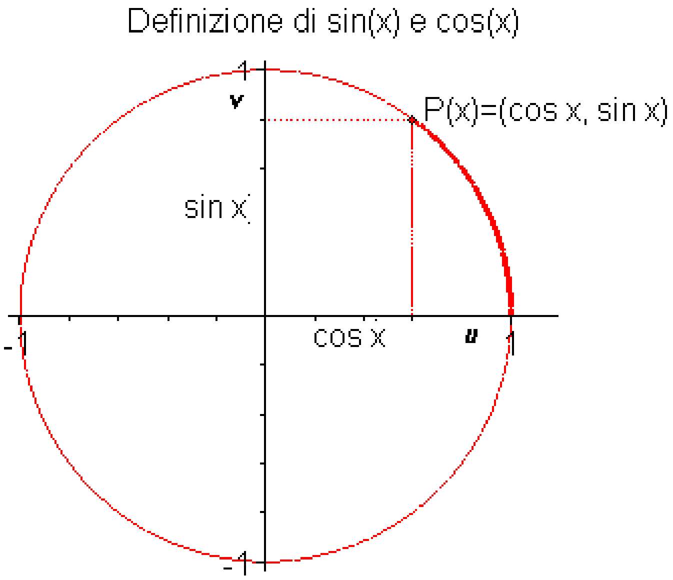
Per fare ciò, consideriamo la circonferenza unitaria centrata nell'origine, la cui equazione, nel piano u-v è data dall'equazione $u^2 + v^2 = 1$.
Consideriamo inoltre un punto P che si muove, in senso antiorario, partendo dal punto $(1, 0)$. Mentre P si muove senza fine sulla circonferenza, molte sono le quantità correlate che variano allo stesso tempo: la coordinata u e la coordinata v di P, la pendenza del segmento che unisce P con l'origine, ed altre ancora (per questo le funzioni seno e coseno sono anche chiamate **funzioni circolari**).

Definizione 33 *Per ogni numero reale* x*, sia* $P(x)$ *il punto raggiunto muovendosi di* x *unità di distanza, in senso antiorario, a partire da* $(1, 0)$ *(se* $x < 0$ *andare in senso antiorario) Allora*

$$\begin{aligned} \cos x &= \text{la coordinata } u \text{ di } P(x) \\ \sin x &= \text{la coordinata } v \text{ di } P(x) \end{aligned}$$

■.

Questo è il disegno chiave



2.3.1 Proprietà Fondamentali delle Funzioni Seno e Coseno

Dominio e codominio Per ogni valore di x, $\cos x$ e $\sin x$ sono le coordinate di $P(x)$ che dista x unità di distanza dal punto $(1,0)$ sulla circonferenza unitaria (Ricordare che se $x<0$ si gira in senso antiorario). Quindi ogni valore di x è un input ammissibile. Ne consegue che il dominio di entrambe le funzioni è $(-\infty,+\infty)$.
Mentre il punto $P(x)$ si muove sulla circonferenza unitaria, le coordinate (u,v) del punto fluttuano, ma solo tra -1 ed 1. Ne consegue che entrambe le funzioni hanno lo stesso codominio, l'intervallo chiuso $[-1,1]$. In altre parole, per tutti i valori di x si ha

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{e} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

Pari e Dispari Segue dalla definizione e dalla simmetria della circonferenza unitaria che la funzione seno è dispari e la funzione coseno è pari. ▶ In simboli:

Come lo mostra-no?

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{e} \quad \cos(-x) = \cos x$$

Le Funzioni sono 2π Periodiche. La lunghezza della circonferenza unitaria vale, come ben noto, 2π; quindi i punti $P(x)$ e $P(x+2\pi)$ sono identici. Ne consegue che le funzioni seno e coseno ripetono se stesse, come mostra anche il grafico, su ogni intervallo di ampiezza 2π. In linguaggio matematico le funzioni seno e coseno sono funzioni 2π-**periodiche**. In simboli

$$\sin(x+2\pi) = \sin x \quad \text{e} \quad \cos(x+2\pi) = \cos x$$

Una Famosa Identità Trigonometrica. Per ogni numero reale x le coordinate del punto $P(x)$ sono date da $(\cos x, \sin x)$. Poiché il punto $P(x)$ giace sulla circonferenza unitaria le coordinate di P devono soddisfare l'equazione $u^2 + v^2 = 1$. Si ha perciò

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

E' possibile scrivere (o esprimere) le funzioni seno e coseno attraverso una semplice formula algebrica ? La risposta è negativa. Esse sono conosciute come funzioni **trascendenti**, cioè come funzioni che NON possono essere scritte come combinazione algebrica di potenze, radici, somme, prodotti, ...

2.3.2 Altre Funzioni Trigonometriche

Altre quattro funzioni trigonometriche sono definite a partire dalle funzioni seno e coseno. Esse sono

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x}\ ; & \cot x &= \frac{\cos x}{\sin x}\ ; \\ \sec x &= \frac{1}{\cos x}\ ; & \csc x &= \frac{1}{\sin x}\ . \end{aligned}$$

Sono riportati qui di seguito pezzi di grafici delle funzioni sopra definite. Essi sono sufficienti a descrivere le funzioni. Come le funzioni seno e coseno esse sono periodiche di periodo 2π (di fatto la tangente e cotangente sono periodiche di periodo π, verificare !)

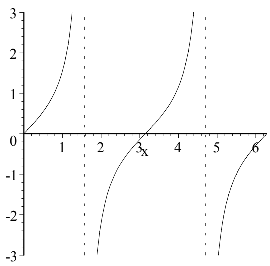


Grafico di $\tan x$

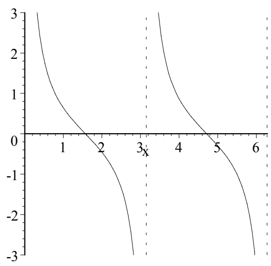


Grafico di $\cot x$

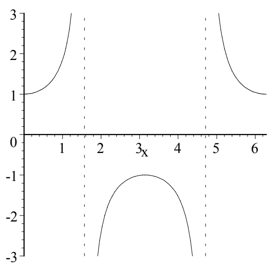


Grafico di $\sec x$

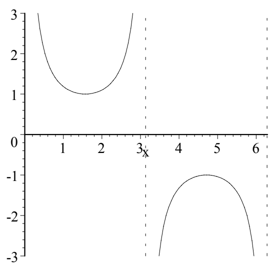


Grafico di $\csc x$

Proprietà delle "Altre" Funzioni Trigonometriche

Dominio e codominio. Poiché seno e coseno sono definite per tutti i numeri reali, le altre funzioni trigonometriche sono anch'esse definite per tutti i numeri

reali eccetto quelli per i quali si annulla il denominatore. Il dominio della cosecante consiste, quindi, di tutti i numeri reali esclusi i multipli di π.
Come mostrano i grafici, la tangente e cotangente hanno rango $(-\infty, +\infty)$, mentre le uscite delle secanti e cosecanti devono essere, in valore assoluto, maggiori o uguali ad 1. Nel linguaggio degli intervalli, la secante e cosecante hanno rango pari a $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

Asintoti La tangente, cotangente, secante e cosecante hanno tutte asintoti verticali. (Verificare per quali valori di x).

Proprietà delle Funzioni Le seguenti proprietà seguono in modo immediato dalle definizioni

$$\begin{array}{cc} |\sec x| \geq 1 & |\csc x| \geq 1 \\ \tan(-x) = -\tan x & \sec(-x) = \sec x \end{array}$$

La Funzione Tangente, il Cerchio Unitario e la Pendenza. Così come le funzioni seno e coseno, la funzione tangente ha una interpretazione geometrica:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \text{pendenza del segmento che unisce l'origine con } P(x)$$

Interpretare la tangente come pendenza mostra, per esempio, perché $\tan(\pi/4) = 1$ e perché $\tan x \to \pm\infty$ quando $x \to \pi/2$.

2.4 Esercizi

1. Trovare dominio e rango delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = e^{x^2}$;
   (b) $f(x) = \ln\left(x^2\right)$;
   (c) $f(x) = \ln\left(x^3+1\right)$;
   (d) $f(x) = \exp\left((x-4)^2-1\right)$;
   (e) $f(x) = \sin(3x-1)$;
   (f) $f(x) = \sqrt{1-\cos x}$;
   (g) $f(x) = \sin(1-\sin x)^{1/3}$;

2. Dire quale delle seguenti funzioni è pari o dispari e perché:

   (a) $f(x) = e^{\cos x}$;
   (b) $f(x) = 1+\cos x$;
   (c) $f(x) = x+\sin x$;
   (d) $f(x) = x\sin x$;
   (e) $f(x) = x\cos x$;
   (f) $f(x) = |\sin x|$;
   (g) $f(x) = \sin^2 x$;

3. Trovare il periodo delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = \cos x - 1$;
   (b) $f(x) = e^{\sin x}$;
   (c) $f(x) = \sin(2x)$;
   (d) $f(x) = \sin(x/2)$;
   (e) $f(x) = \sin(2\pi x)$;
   (f) $f(x) = \cot x$;

4. Dire se i punti seguenti giacciono su di una retta. Se si, trovare l'equazione della retta

x	5.2	5.3	5.4	5.6	5.9	6.5
y	27.8	29.2	30.6	33.4	37.6	46.0

5. Dare un esempio di un polinomio di grado pari che sia una funzione pari. E' vero o non è vero che tutti i polinomi di grado pari definiscono una funzione pari? Perché?

6. Sia $f(x) = e^x$ e $g(x) = 10^x$. Mostrare che esiste un k reale tale che $g(x) = f(k\,x)$.

7. Siano $f(x) = \ln\left(x^3\right)$ e $g(x) = \ln\left(x^2\right)$.

    (a) Quali sono i domini di f e di g ?

    (b) Spiegare come si ottiene il grafico di f da quello di $\ln x$.

    (c) Spiegare come si ottiene il grafico di g da quello di $\ln x$.

8. Sia $f(x) = \ln(2 + \sin x)$

    (a) Valutare $f(0)$, $f(\pi/6)$, $f(\pi/2)$ con l'aiuto di una calcolatrice.

    (b) Quali sono il dominio ed il rango di f ?

    (c) f è pari o dispari ? Giustificare la risposta.

    (d) f è periodica ? Giustificare la risposta.

    (e) Trovare il massimo e minimo valore di f.

9. Sia $y = 20x + 1$ l'equazione di una retta che interseca la curva $y = b^x$ nei punti 0 e 4.

    (a) Trovare il numero b.

    (b) Qual'è la pendenza della retta che interseca la curva $y = \log_b x$ nei punti 1 e 81 ?

10. Usare le proprietà delle funzioni seno e coseno per mostrare che la funzione tangente è dispari.

11. Trovare il periodo delle seguenti funzioni.

    (a) $f(x) = |\sin x|$;

    (b) $f(x) = 2|\cos(3x)|$;

    (c) $f(x) = \cos^2 x$;

    (d) $f(x) = \cos x \sin x$;

    (e) $f(x) = \cos(|x|)$;

    (f) $f(x) = \sin(|x|)$;

12. Spiegare perché $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 + \cos x} \leq 1$ per tutti gli x.

13. Trovare un numero A tale che $|1 + \sec x| \leq A$ per $2 \leq x \leq 4$.

14. Sia f una funzione lineare, cioè $f(x) = ax + b$ con a e b costanti.

    (a) Mostrare che $f(5) - f(3) = f(10) - f(8)$.

    (b) Trovare un numero c tale che $f(4) - f(1) = f(c) - f(9)$.

    (c) Mostrare che $3(f(2) - f(-1)) = f(10) - f(1)$.

(d) Assumiamo che $h \neq 0$ sia costante. Mostrare che l'espressione

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

non dipende né da x né da h. Qual'è il significato geometrico dell'espressione?

15. Sia f della forma $f(x)=Ab^x$ dove A e b sono costanti >0.

    (a) Spiegare perché $f(5)/f(3)=f(10)/f(8)$.

    (b) Trovare un numero a tale che $f(4)/f(1)=f(a)/f(-9)$.

    (c) Spiegare perché $(f(2)/f(-1))^3=f(10)/f(1)$.

    (d) Mostrare che il valore dell'espressione $f(x+h)/f(x)$ non dipende da x.

    (e) Mostrare che il valore dell'espressione

    $$\frac{\ln(f(x+h)/f(x))}{h}\ ,\quad h\neq 0$$

    non dipende da h.

16. Supponiamo che la retta $y=2$ sia un asintoto orizzontale per la funzione f :

    (a) Spiegare perché la retta $y=5$ è un asintoto orizzontale per la funzione $g(x)=f(x)+3$;

    (b) Trovare l'equazione di un asintoto orizzontale per la funzione $g(x)=f(x+1)$;

    (c) Trovare l'equazione di un asintoto orizzontale per la funzione $g(x)=3f(x+4)+1$;

17. Supponiamo che la retta $x=3$ sia un asintoto orizzontale per la funzione f ;

    (a) Spiegare perché la retta $x=3$ è un asintoto verticale per la funzione $g(x)=f(x)+3$;

    (b) Trovare l'equazione di un asintoto orizzontale per la funzione $g(x)=f(x+1)$;

    (c) Trovare l'equazione di un asintoto orizzontale per la funzione $g(x)=3f(x+4)+1$;

18. Siano $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ e $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$

    (a) Mostrare che $f(x)=g(x)$ per tutti gli $x\geq 0,\ x\neq 9$.

    (b) Trovare dominio e rango di f.

(c) Trovare dominio e rango di g.

(d) Come sono legati tra loro i grafici di f e di g ?

(e) Il grafico di f ammette asintoto orizzontale ? Se si, quale ?

(f) Il grafico di f ammette asintoto verticale ? Se si, quale ?

19. Trovare l'equazione di una funzione razionale che ha $y = 1$come asintoto orizzontale e NON ammette asintoto verticale (ATT. NE Le risposte possibili sono molteplici)

20. Trovare l'equazione di una funzione razionale che ha $x = 1$come asintoto verticale e NON ammette asintoto orizzontale (ATT. NE: Le risposte possibili sono molteplici)

21. Trovare l'equazione di una funzione razionale che ha $x = -2$ e $x = 1$ come asintoti verticali ed ammette asintoto orizzontale per $y = 3$

2.5 Come Costruire Nuove Funzioni

Le **operazioni sulle funzioni** sono del tutto simili a quelle sui numeri. L'addizione, per esempio, ha senso per le funzioni. La funzione $h(x) = x + \sin x$ è in modo naturale la somma delle due funzioni $f(x) = x$ e $g(x) = \sin x$.

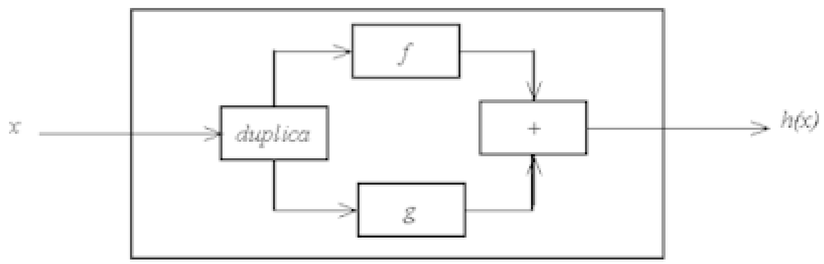
Una operazione matematica parte con due o più oggetti dello stesso tipo e produce un nuovo oggetto dello stesso tipo. In particolare: *Una operazione tra funzioni accetta una o più funzioni come ingresso e produce una nuova funzione come uscita*

Disegni schematici del tipo

$$x \to \boxed{\;f\;} \to f(x) \qquad x \to \boxed{\textit{quadrato}} \to x^2$$

rappresentano le funzioni come sistemi ingresso-uscita; esse accettano ingressi, li trasformano e producono una uscita. Da questo punto di vista "ingegneristico" le operazioni tra funzioni collegano insieme sistemi semplici per crearne di più complessi.

Somma Il seguente diagramma mostra la macchina che costruisce la somma di funzioni. Due funzioni f e g sono collegate in parallelo per dar luogo alla funzione somma h



La prima scatola duplica l'ingresso x, perché una copia è necessaria per f, l'altra per g. L'ultima scatola somma i due ingressi. La scatola esterna più grande rappresenta la nuova funzione. La definizione di addizione tra funzioni rende preciso quanto descritto dalla figura.

Definizione 34 *Sia f e g due funzioni. La loro somma, indicata con $f + g$ è una nuova funzione definita dalla regola*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

Le altre operazioni algebriche hanno definizioni simili e simili diagrammi. Li tratteremo in modo meno formale.

2.5.1 Operazioni Algebriche tra Funzioni

Le operazioni algebriche - addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione -su funzioni definite simbolicamente sono semplici e familiari. La seguente tavola illustra le varie operazioni applicate alle funzioni f e g definite da $f(x) = \cos x$ e $g(x) = x$

Operazioni algebriche tra funzioni

Operazione	**Uscita**	**Regola**	**Dominio**
Addizione	$f+g$	$\cos x + x$	$(-\infty, +\infty)$
Sottrazione	$f-g$	$\cos x - x$	$(-\infty, +\infty)$
Moltiplicazione	$f \cdot g$	$x \cos x$	$(-\infty, +\infty)$
Divisione	$f\,/\,g$	$\cos x\,/\,x$	$\{x : x \neq 0\}$

La tavola non contiene sorprese, conviene comunque notare quanto segue

Le uscite sono funzioni Ogni uscita è una nuova funzione la cui regola è definita in colonna tre.

Domini Il dominio naturale di $f\,/\,g$ è più piccolo del dominio di f e di g poiché il quoziente ha senso solo se $g(x) \neq 0$. A volte, come mostra il prossimo esempio, lo studio dei domini richiede maggior attenzione.

Esempio 35 *Sia f la funzione definita dalla formula $f(x) = x^2 + 3/x$ e g la funzione definita dalla tabella*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-4	-9	-1	2	0	8	3	-2

Trovare il dominio di $f\,/\,g$ e alcuni valori dell'uscita di $f\,/\,g$.

Soluzione L'espressione $f(x)\,/\,g(x)$ ha senso se e solo se entrambe le funzioni sono definite ed il denominatore non si annulla. Se $x = 3$ si ha

$$\frac{f}{g}(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = \frac{10}{3}$$

Tuttavia

$$\frac{f}{g}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{f\left(\frac{3}{2}\right)}{g\left(\frac{3}{2}\right)}\ ;\ \frac{f}{g}(0) = \frac{f(0)}{g(0)} \quad \text{e} \quad \frac{f}{g}(1) = \frac{f(1)}{g(1)}$$

non sono definite, ognuna per una ragione diversa (quale ?). Infatti, $f(x)\,/\,g(x)$ è definito solo per i valori di x appartenenti all'insieme $\{-3, -2, -1, 2, 3, 4\}$. Quindi il dominio di $f\,/\,g$ è più piccolo sia del dominio di f che di quello di g. ■

2.5.2 Composizione di Funzioni

Siano f e g funzioni definite da $f(x) = x^2$ e $g(x) = \cos x$. Le nuove funzioni h e k definite da

$$h(x) = \cos x^2 \quad \text{e} \quad k(x) = \cos^2 x$$

sono costruite a partire da f e da g per **composizione**, cioè calcolando una funzione sui valori dell'altra. Più precisamente:

Definizione 36 *Siano f e g funzioni. La **composizione** di f con g, indicata con $f \circ g$ è la funzione definita dalla regola*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \ .$$

Per quanto riguarda le funzioni precedenti f, g, h e k si ha

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(\cos x) = \cos^2 x = k(x) \ ; \\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \cos x^2 = h(x) \ .\end{aligned}$$

Da notare le seguenti proprietà della composizione:

L'ordine conta. In generale $f \circ g$ e $g \circ f$ sono diversi tra loro; non solo ma a volte non sono entrambi ammissibili. Se, per esempio $f(x) = -|x|$ e $g(x) = \sqrt{x}$, $f \circ g$ ha senso mentre non lo ha $g \circ f$ (perché ?)

Domini Poiché la composizione $f \circ g$ abbia senso, x deve essere, prima di tutto, un ingresso ammissibile per la funzione g, cioè deve esistere $g(x)$. Adesso, per poter continuare, bisogna che $g(x)$ sia un ingresso ammissibile per la funzione f. Quindi in generale il dominio di $f \circ g$ è un sottoinsieme del dominio di g. Più precisamente, il sottoinsieme del dominio di g per il quale le uscite $g(x)$ appartengono al dominio di f.

Esempio 37 *Sia $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 5$. Determinare il dominio di $f \circ g$ e di $g \circ f$.*

Soluzione Se $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 5$ si ha

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(x+5) = \sqrt{x+5} \\ (g \circ f)(x) &= g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 5\end{aligned}$$

Il dominio di $f \circ g$ è l'intervallo $[-5, +\infty)$, mentre il dominio di $g \circ f$ è l'intervallo $[0, +\infty)$. ■

Il diagramma a blocchi della composizione è particolarmente semplice:

$$x \rightarrow \boxed{\ f\ } \xrightarrow{f(x)} \boxed{\ g\ } \rightarrow g(f(x))$$

fe g sono legate in serie. L'uscita di f viene convogliata in g.

Esempio 38 *Sia* $f(x) = x + 2$ *e sia* g *definita dalla tabella*

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-4	-9	-1	2	0	8	3	-2

Descrivere le funzioni $f \circ g$ *e* $g \circ f$*; descrivere i loro domini.*

Soluzione Poiché $f(x) = x + 2$ si ha che

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) + 2\,; \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2)\ .$$

Le formule che definiscono le composizioni permettono di effettuare i calcoli richiesti, bisogna fare però attenzione agli ingressi ammissibili. Per esempio

$$(f \circ g)(10) = g(10) + 2$$

non è definito. Il problema, ancora una volta, è legato ai domini di definizione. Sebbene il dominio di f siano tutti i numeri reali, quello di g è dato dall'insieme finito di valori indicati nella prima riga della tabella. Ne segue che, poiché f non presenta problemi, il dominio di $f \circ g$ coincide con il dominio di g.
Diverso è il caso di $g \circ f$. Poiché $g(f(x)) = g(x+2)$ un ingresso x di f è accettabile per la composizione solo se $x + 2$ appartiene al dominio di g, cioè solo se $x \in \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$.
Si lascia per esercizio scrivere i valori di $f \circ g$ e di $g \circ f$. ■

Esempio 39 *Andando in macchina da Firenze a Bologna, l'altitudine (misurata in metri sopra il livello del mare) varia col variare della distanza percorsa (misurata in chilometri da Firenze). D'altra parte, la distanza percorsa varia col tempo (misurata in ore dalla partenza). Ne segue che l'altitudine varia con il tempo. Interpretare la situazione nel linguaggio della composizione di funzioni.*

Soluzione Indichiamo con A, d e t altitudine, la distanza ed il tempo. L'altitudine è una funzione f della distanza percorsa, mentre la distanza è una funzione g del tempo. Si ha cioè

$$A = f(d)\ , \quad d = g(t)$$

La funzione composta

$$A(t) = (f \circ g)(t) = f(g(t))$$

rappresenta l'altitudine al variare del tempo di percorrenza, quindi come funzione del tempo. ■

Funzione Identità

I numeri 0 e 1 rappresentano le identità per le operazioni di somma e prodotto tra numeri poiché

$$a + 0 = 0 + a = a\,, \quad a \times 1 = 1 \times a = a$$

per ogni numero reale a.

Una nozione simile si applica alla composizione di funzioni. La composizione è una operazione tra funzioni, quindi l'identità deve anch'essa essere una funzione. L'identità, che indicheremo con la lettera I ha la seguente, semplice definizione.

Definizione 40 *La* ***funzione identità*** *è definita dalla regola*

$$I(x) = x$$

Per poter avere il nome di identità I deve soddisfare l'equazione

$$I \circ f = f \circ I = f$$

per ogni funzione f. Ciò avviene, infatti

$$(I \circ f)(x) = I(f(x)) = f(x)\ ; \quad \text{e} \quad (f \circ I)(x) = f(I(x)) = f(x)$$

In parole: *la composizione di ogni funzione f con I, in qualsiasi ordine, dà f.*

2.5.3 Funzioni Inverse

La parola *inverso* ha vari significati in matematica. I numeri 5 e -5 sono inversi additivi l'uno dell'altro perché la loro somma da 0, l'identità additiva. In modo simile 5 ed $1/5$ sono inversi moltiplicativi perché il loro prodotto da 1, l'identità moltiplicativa.
Il termine *funzione inversa* ha ancora un altro significato *Due funzioni f e g sono inverse l'una all'altra, rispetto alla composizione se componendole in un ordine qualsiasi si ottiene la funzione identità.*

Definizione 41 *Siano f e g funzioni. Se le equazioni*

$$(f \circ g)(x) = x \quad e \quad (g \circ f)(x) = x$$

valgono per tutti gli x nel dominio di g ed f rispettivamente, allora f e g sono ***funzioni inverse*** *l'una dell'altra. In questo caso scriveremo $g = f^{-1}$ (e $f = g^{-1}$).*

Esempio 42 *Sia $f(x) = x + 3$. Trovare $f^{-1}(x)$.*

Soluzione Consideriamo la definizione di funzione inversa. Deve essere

$$x = I(x) = \left(f^{-1} \circ f.\right)(x) = f^{-1}(x + 3)$$

Il risultato sarebbe ottenuto se $f^{-1}(x)$ fosse uguale a $x - 3$. Infatti in tal caso si avrebbe

$$x = I(x) = \left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}(x + 3) = (x + 3) - 3 = x$$

Prima di affermare che questa è l'inversa di f bisogna verifica che vale anche la relazione $I = f \circ f^{-1}$. Si ha

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(x - 3) = (x - 3) + 3 = x$$

Si può allora concludere che $f^{-1}(x) = x - 3$. ∎

Esempio 43 *Dire se la funzione costante $f(x) = 3$ ammette inversa.*

Soluzione. Sia g una qualsiasi funzione che ammette la composizione $f \circ g$. Si ha

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3$$

qualsiasi sia il valore di x. Ne segue che non può esistere una funzione g tale che $(f \circ g)(x) = x$ quindi f non è invertibile. ■

Usando i diagrammi a blocchi il fatto che g sia l'inversa di f si traduce come:

$$x \to \boxed{\quad f \quad} \overset{f(x)}{\to} \boxed{\quad g \quad} \to x\ ; \quad x \to \boxed{\quad g \quad} \overset{g(x)}{\to} \boxed{\quad f \quad} \to x\ .$$

Famiglie famose. Le funzioni logaritmiche ed esponenziali con la stessa base sono un importante ed utile esempio di funzioni inverse. Infatti *abbiamo definito* le funzioni logaritmo come le inverse degli esponenziali. In base e , per esempio, la funzione logaritmo naturale è definita dalla condizione

$$y = \ln x \iff x = e^y$$

In modo simile, in base 10, $y = \log_{10} x \iff x = 10^y$

Condizioni equivalenti. Se f e g sono funzioni inverse, allora

$$f(a) = b \iff g(b) = a$$

per ogni elemento a nel dominio di f.

Domini e Codomini. Se f e g sono funzioni inverse, allora gli ingressi di g sono le uscite di f e viceversa. Quindi il dominio di f è il rango di g ed il dominio di g è il rango di f.

Quali Funzioni Ammettono Inversa ?

Abbiamo visto prima che la funzione $f(x) = 3$ non ammette funzione inversa. Si pone allora il problema di capire quali sono, che proprietà hanno le funzioni invertibili.

Funzioni biunivoche. Ogni funzione f , invertibile o meno, determina una corrispondenza tra il suo dominio ed il suo rango; per ogni ingresso x appartenente al dominio, f assegna il valore $f(x)$ come elemento del rango. Una funzione inversa, se esiste, inverte questa corrispondenza. Per essere invertibile, quindi una funzione deve essere **biunivoca** o come si dice **uno ad uno**, cioè ad ogni uscita deve corrispondere uno ed un solo ingresso. Una funzione costante fallisce banalmente questo test: manda ogni ingresso nella stessa uscita.

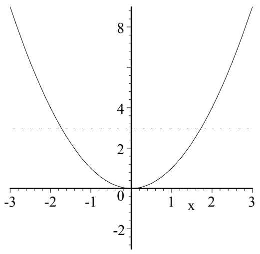
Come riconoscere l'invertibilità dal grafico. Graficamente parlando, una funzione biunivoca è quella che soddisfa il **test della retta orizzontale:**

Nessuna retta orizzontale attraversa il grafico più di una volta.

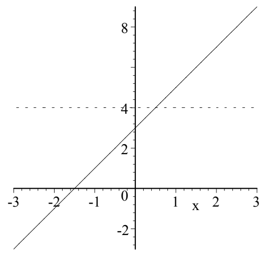
Il test garantisce che ogni possibile uscita y corrisponde a non più di un ingresso x.

Esempio 44 *Consideriamo le funzioni* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = 2x + 3$. *Sono invertibili ? Se si trovare l'inversa.*

Soluzione. Disegniamo i grafici delle due funzioni



$f(x) = x^2$



$g(x) = 2x + 3$

La funzione $f(x)$ non è biunivoca nel dominio $[-3, 3]$ in cui è stata disegnata, come il test della retta orizzontale mostra, mentre g lo è.
Per trovare l'inversa di g usiamo un po' di algebra

$$y = g^{-1}(x) \Longleftrightarrow x = g(y) \Longleftrightarrow x = 2y + 3 \Longleftrightarrow y = g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2} \ .$$

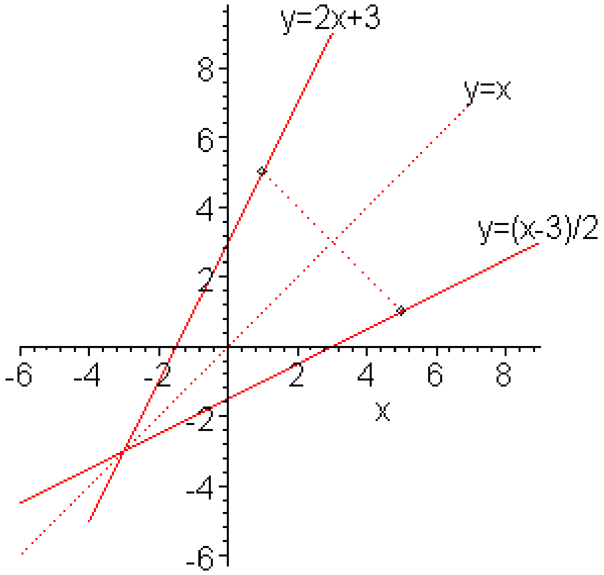
■

Inversione e Simmetria

La definizione di funzione inversa, interpretata graficamente dice:

> *Un punto* (a, b) appartiene al grafico di f se e solo se il punto (b, a) - la riflessione di (a, b) rispetto la retta $y = x$ - appartiene al grafico di f^{-1}.

I grafici di g e g^{-1} del precedente esempio illustrano cosa significa ciò



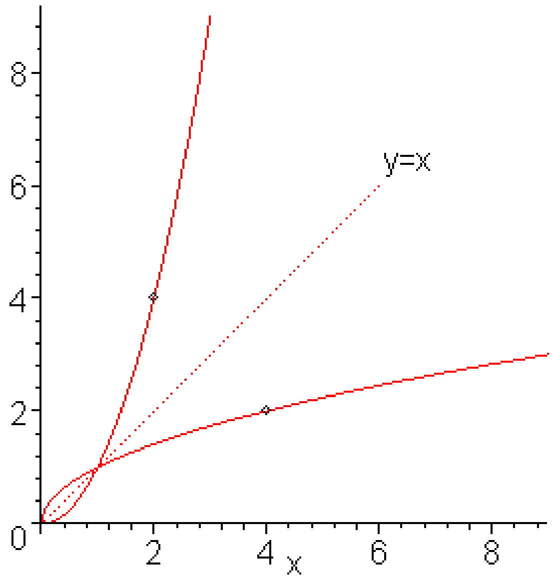
Grafici di g e g^{-1}

I due grafici sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$. Ogni punto sui due grafici è l'immagine speculare di un punto sull'altro grafico. Una coppia simmetrica di punti $(1, 5)$ e $(5, 1)$ è stata indicata.

Restringere il Dominio per Rendere Invertibile una Funzione Abbiamo detto prima che la funzione $f(x) = x^2$ non è invertibile giudicando dal grafico della funzione nell'intervallo $[-3, 3]$. Ma non sappiamo forse che $g(x) = \sqrt{x}$ è un'inversa ? Come conciliamo questa apparente contraddizione ? Per farlo *bisogna guardare con più attenzione ai domini delle funzioni.*

Esempio 45 *Dare senso compiuto al fatto che le funzioni* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = \sqrt{x}$ *sono una l'inversa dell'altra.*

Soluzione. La funzione $f(x) = x^2$ non è biunivoca sul suo dominio naturale che l'insieme dei numeri reali. Tuttavia f *diventa* biiettiva se restringiamo il dominio all'insieme degli ingressi non negativi. Con tale restrizione f è invertibile ed ha come inversa $g(x) = \sqrt{x}$ come il seguente grafico mostra



Inverse: $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$

I grafici di fe g sono, come ci si aspettava, immagini simmetriche rispetto alla retta $y = x$. I punti indicati nel grafico mostrano che $f(2) = 4$ e $g(4) = 2$. In conclusione: $f(x) = x^2$ *è invertibile nel dominio* $[0, +\infty)$ *; la sua inversa è* $g(x) = \sqrt{x}$. ■

Una nota rispetto ai domini. Nella maggior parte dei casi è possibile trattare i domini in modo informale: per la maggior parte delle funzioni il **dominio naturale** (l'insieme di tutti gli ingressi per cui le regole che definiscono la funzione hanno senso) è chiaro dal contesto e raramente richiede attenzione esplicita.

Il problema della ricerca dell'inversa è una eccezione a questa regola. Come l'esempio precedente ha mostrato, una funzione può essere invertibile su di un dominio ma non su di un altro. Fare perciò sempre attenzione ai domini quando si lavora con funzioni e le loro inverse.

2.5.4 Esercizi

1. Sia $f(x) = \sin x,\ g(x) = x^2$ e $h(x) = x+3$. Scrivere ognuna delle seguenti funzioni come composizione di una o più funzioni $f,\ g,\ h$.

   (a) $j(x) = \sin(x+3)$;
   (b) $j(x) = (x+3)^2$;
   (c) $j(x) = \sin^2 x$;
   (d) $j(x) = \sin x^2$;
   (e) $j(x) = x^2 + 3$;
   (f) $j(x) = 3 + \sin x$;
   (g) $j(x) = \sin^2(x+3)$;
   (h) $j(x) = \sin(x+3)^2$;
   (i) $j(x) = \sin x^2 + 3$;
   (j) $j(x) = \sin(x+e)^2$;
   (k) $j(x) = x^4$;
   (l) $j(x) == x + 6$;

2. Scrivere ognuna delle seguenti funzioni come composizione di due o più funzioni più semplici. Per esempio, la funzione $h(x) = (x+1)^2$ può essere scritta come $h(x) = (f \circ g)(x)$ dove $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$.

   (a) $h(x) = \left(x^3 - 4x + 5\right)^6$;
   (b) $h(x) = \ln(2 + \sin x)$;
   (c) $h(x) = e^{x^2}$;
   (d) $h(x) = \sqrt{1 + e^x}$;
   (e) $h(x) = \left|x^2 - 4\right|$;
   (f) $h(x) = \sin\left(x^2 - 4x + 4\right)$;
   (g) $h(x) = \cos^2 x + 4\cos x + 4$;

3. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ ristretta al dominio$(-\infty, 0]$. Poiché f è biunivoca su questo intervallo ammette una inversa f^{-1}.

   (a) Disegnare il grafico di f e f^{-1} sugli stessi assi.
   (b) Qual'è la formula per f^{-1}?
   (c) Quali sono il dominio ed il codominio di f^{-1} ?

4. Supponiamo che f sia una funzione lineare non costante (cioè $f(x) = ax + b,\ a \neq 0$).

   (a) Spiegare perché f^{-1} esiste ;
   (b) Mostrare che f^{-1} è una funzione lineare ;

   (c) Come sono correlate tra loro le pendenze di f e di f^{-1} ;
   (d) Perché l'ipotesi $a \neq 0$ è necessaria in (a) ?

5. Sia $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sqrt{x+1}$.
   (a) Qual'è il dominio di $f + g$?
   (b) Qual'è il dominio di $f \cdot g$?
   (c) Qual'è il dominio di $f \circ g$?
   (d) Qual'è il dominio di $g \circ f$?
   (e) Qual'è il dominio di $g \circ g$?
   (f) Qual'è il dominio di $f \,/\, g$?
   (g) Qual'è il dominio di $g \,/\, f$?

6. Sia $f(x) = \sqrt{x-2}$ e $g(x) = -x$.
   (a) Quali sono il dominio ed il rango di $f \circ g$?
   (b) Quali sono il dominio ed il rango di $g \circ f$?

7. Sia $h(x)$ la concentrazione (in $atomi/cm^3$) dell'ossigeno nell'aria all'altezza x sul livello del mare e sia $g(x)$ il numero di respiri al minuto necessari in media ad una persona quando la concentrazione di ossigeno è di x $atomi/cm^3$. Quale delle seguenti composizioni ci dice qualcosa di utile: $f \circ g$ o $g \circ f$? Cosa dice ?

8. Supponiamo che f sia una funzione pari, g una funzione dispari e h una funzione né pari né dispari, tutte con dominio $\mathbb{R}$.
   (a) Sia $k = g \circ f$. Dire se k è pari, dispari o niente. Spiegare.
   (b) Sia $j = h \circ g$. Dire se j è pari, dispari o niente. Spiegare.
   (c) Sia $m = f \circ f$. Dire se m è pari, dispari o niente. Spiegare.

9. Sia $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$. Quali valori dei parametri a, b, c e d rendono vere le seguenti affermazioni ?
   (a) $f \circ g = g \circ f$;
   (b) $f \circ g = f$;
   (c) $f \circ g = g$;

10. Siano f, g e h funzioni definite su tutto $\mathbb{R}$.
    (a) Trovare f, g e h per le quali sia $f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$;
    (b) Trovare f, g e h per le quali sia $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$;

11. Sia $f(x) = 1$ quando x è irrazionale e $f(x) = 0$ quando x è razionale. Per quali valori di x, ammesso che esistano, è $(f \circ f)(x) = 0$?

12. Sia $f(x) = \sin x$.

    (a) Spiegare perché f non è invertibile in $(-\infty, +\infty)$;

    (b) Spiegare perché f ha un'inversa se ristretta all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$;

    (c) Fissato un sistema di assi tracciare f ed f^{-1} usando il principio di simmetria. (La funzione inversa è nota come la funzione **arcoseno** ed è usualmente scritta come $\arcsin x$ o $\sin^{-1} x$.)

13. Sia f la funzione definita come $f(x) = \begin{cases} 5 - x & se \quad 0 \le x \le 3 \\ 9 - x^2 & se \quad 3 < x \le 5 \end{cases}$

    (a) Dire se la funzione è invertibile o meno. Spiegare la propria scelta

    (b) Nel caso f fosse invertibile trovarne l'inversa.

14. Trovare dominio, codominio ed espressione simbolica dell'inversa delle seguenti funzioni. [ATT.NE in alcuni casi è necessario restringere il dominio per rendere la funzione invertibile]

    (a) $f(x) = x^{1/3}$;

    (b) $f(x) = -\sqrt{x}$;

    (c) $f(x) = x^3 + 1$;

    (d) $f(x) = 1/x$;

    (e) $f(x) = 1/x^2$;

    (f) $f(x) = 2/(3 + 4x)$;

    (g) $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^2$;

    (h) $f(x) = x/\left(x^2 + 4\right)$;

    (i) $f(x) = x/(x + 1)$;

    (j) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

    (k) $f(x) = e^{x^2}$;

    (l) $f(x) = \ln(x/(x + 1))$.

15. Supponiamo che f ed f^{-1} abbiano entrambe come dominio tutto $\mathbb{R}$ e che f sia una funzione dispari. Mostrare che anche f^{-1} è dispari.

16. Supponiamo che f sia una funzione pari definita su $\mathbb{R}$ e che $f(0) = 1$. Spiegare perché il dominio di f^{-1} non può essere $\mathbb{R}$.

17. Supponiamo che f sia invertibile e che $g(x) = f(x + a)$.

    (a) Mostrare che $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - a$.

    (b) Usare il risultato precedente per trovare l'espressione dell'inversa di $f(x) = \ln(x + 1)$.

18. Supponiamo che f sia invertibile e che $g(x) = f(ax)$.

(a) Mostrare che $g^{-1}(x) = f^{-1}(x)/a$.

(b) Usare il risultato precedente per trovare l'espressione dell'inversa di $f(x) = e^{2x}$

19. Supponiamo che f e g siano invertibili e che $h = f \circ g$.

(a) Mostrare che h è invertibile e $h^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$;

(b) Usare il risultato in (a) per ottenere il risultato dell'esercizio 17 (a) ;

(c) Usare il risultato in (a) per ottenere il risultato dell'esercizio 18 (a).

2.6 Modelli Matematici

Cosa vuol dire *modellare* un fenomeno come ad esempio:

- L'indice dei prezzi al consumo;
- La popolazione degli orsi nella Maiella;
- La forza di gravitazione su una Navicella Spaziale;
- La richiesta di grano duro per pasta;
- Il progresso dell'AIDS;
- Il prezzo di un hamburger;
- La richiesta di climatizzazione in Firenze.

Dal punto di vista matematico significa *descrivere o rappresentare* il fenomeno quantitativamente, usando il linguaggio matematico.

Ogni **modello matematico** ha due caratteristiche importanti:

Semplificazione. Nessun modello, neanche quello matematico, riproduce in tutti i dettagli ciò che si vuole modellare. Ogni modello, <u>necessariamente</u> *semplifica* la realtà che descrive.
Un modello utile è semplice abbastanza da permettere calcoli, ma sofisticato abbastanza da catturare l'essenza del fenomeno che modella

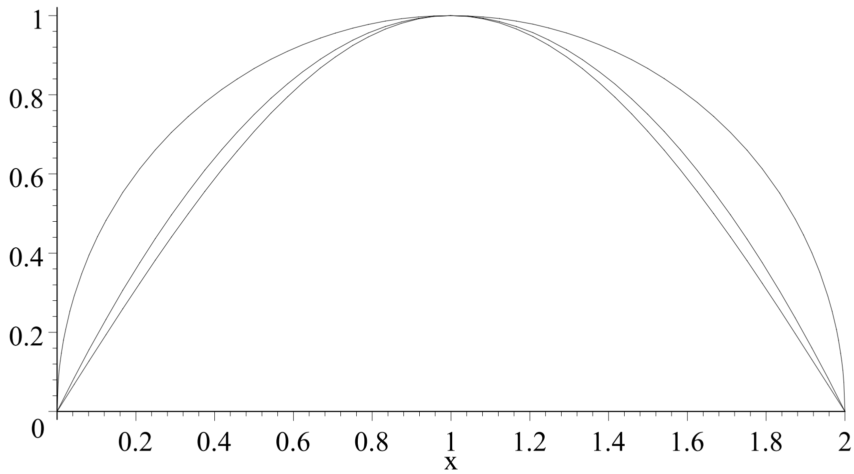
Predizione. Un modello matematico utile deve fare molto di più che non limitarsi a descrivere ciò che è già noto. Deve essere utile a predire e/o comprendere il comportamento del fenomeno.

Il processo di modellizzazione matematica comporta tre passaggi:

1. **Descrizione.** Descrivere un fenomeno nel linguaggio matematico, usare quantità matematiche come: funzioni, variabili, equazioni, ...
2. **Deduzione**. Capacità di dedurre conseguenze matematiche dalla descrizione;
3. **Interpretazione.** Interpretare i risultati matematici nel linguaggio del fenomeno in studio.

2.6.1 Traiettorie Paraboliche

Quale tipo di traiettoria compie un proiettile (una palla, un saltatore in alto) nel suo viaggio dal terreno all'aria e giù di nuovo sul terreno?
La forma generale - una specie di arco - è chiara abbastanza, ma come la si descrive matematicamente? E' una parabola, un arco di circonferenza, un pezzo di sinusoide?



Un semicerchio, una parabola, una sinusoide

Tutte sembrano plausibili, ma una sola è quella corretta. Quale ?

FATTO (fisico) Supponiamo che un proiettile lasci l'origine degli assi con velocità iniziale v_0 lungo la direzione indicata dalla retta $y = mx$, influenzato solo dalla gravità. La traiettoria del proiettile è data dall'equazione quadratica (parabola)

$$y = m\,x - \frac{g}{2v_0^2}\left(1 + m^2\right)\,x^2$$

<u>**Osservazioni**</u>

Angolo Iniziale. La direzione nella quale si spara il proiettile può essere descritta sia dando il *coefficiente angolare* della retta che l'angolo φ che la retta forma con l'asse delle x. In tal caso $m = \tan\varphi$ e l'equazione della traiettoria diventa

$$y = x\,\tan\varphi - \frac{g}{2v_0^2}\left(1 + \tan^2\varphi\right)\,x^2$$

Unità di misura. La formula precedente funziona solo se si scelgono unità di misura consistenti. Se x ed y sono *metri* e v_0 è misurato in *metri / secondo* allora $g = 9.82\, m/\sec^2$. (Sistema MKS)

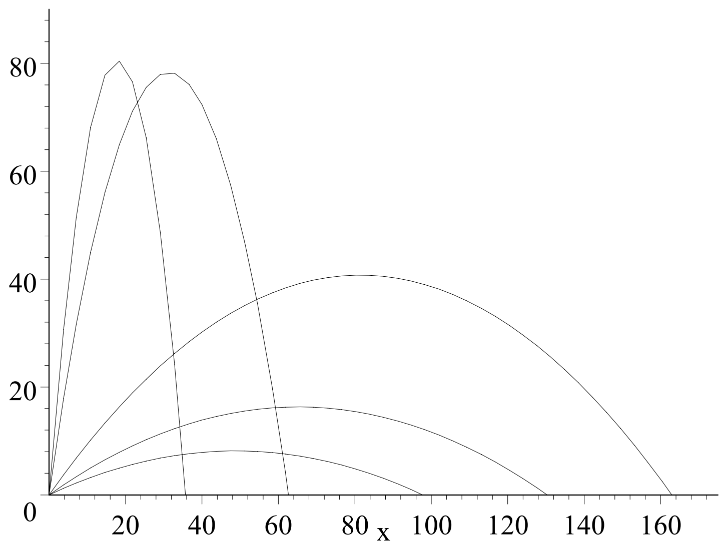
Su o Giù ? La *gravità* causa un'accelerazione verso il basso e quindi nella formula mettiamo g positiva ed il segno $-$. Avremmo potuto dire, in modo equivalente, che $g = -9.82\, m/\sec^2$ e mettere il segno $+$ nella formula.

Esempio 46 *Un cannone spara a velocità* $v_0 = 40\, m/\sec$ *ma con diverse angolazioni. Descrivere le possibili traiettorie.*

Soluzione. Con le unità di misura usate $v_0 = 40\, m/\sec$ e $g = 9.82\, m7\sec^2$ quindi si ha

$$\begin{aligned} y &= m\,x - \frac{9.82}{2 \cdot 1600}\left(1+m^2\right) x^2 \\ &= -\frac{9.82}{3200}\left(1+m^2\right) x \left(x - \frac{3200}{9.82}\frac{m}{1+m^2}\right) \end{aligned}$$

Ecco di seguito alcune traiettorie del proiettile per vari valori di m



Traiettorie del Proiettile

Osservazioni:

Varie Forme Ogni traiettoria parte dall'origine. Al variare di m la traiettoria può essere alta o bassa. Come si osserva, la traiettoria più lunga sta "nel mezzo" tra questi due estremi.

A Terra. Quando la traiettoria tocca il terreno la coordinata y vale 0. Ogni traiettoria ha due radici, $x = 0$ punto di partenza del proiettile e,

$$x_{\text{max}} = \frac{3200}{9.82}\frac{m}{1+m^2}$$

dove il proiettile atterra (se $m = 1 \implies x_{\text{max}} = \dfrac{1600}{9.82} \approx 162.\,932\,m$.

Altezza Massima. Conoscendo x_{max} è facile calcolare l'altezza massima y_{max}. Infatti, per la simmetria della parabola rispetto all'asse y_{max} si realizza per $x = x_{\text{max}}/2$, cioè

$$y_{\text{max}} = \frac{800}{9.82}\frac{m^2}{1+m^2}$$

■

Esempio 47 *Consideriamo ancora la situazione dell'Esempio 1. Per quale valore di m il proiettile raggiunge l'altezza massima) E , quale valore realizza la distanza massima ?*

Soluzione. Abbiamo ottenuto le due formule

$$\begin{aligned} x_{\text{max}} &= \frac{3200}{9.82}\frac{m}{1+m^2} = g\,(m) \\ y_{\text{max}} &= \frac{800}{9.82}\frac{m^2}{1+m^2} = f\,(m) \end{aligned}$$

Si ha allora che sia la l'altezza massima che la distanza massima dipendono da m; sono, come si dice in matematica *funzioni* di m.

Disegniamo i grafici di f e di g, si ha

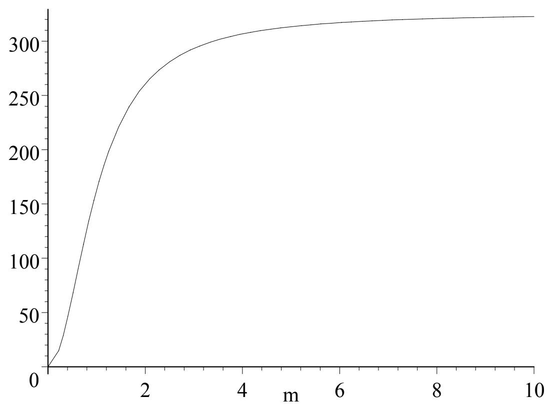


Grafico di $f\,(m)$

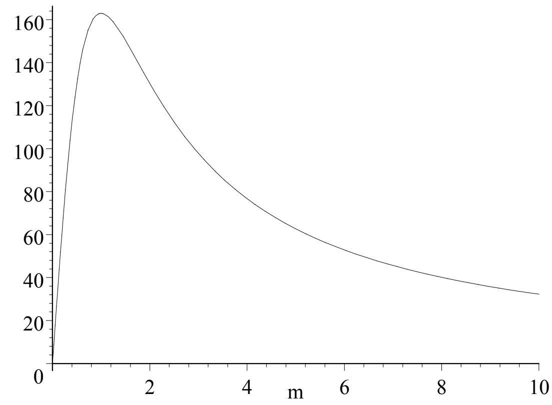


Grafico di $g\,(m)$

Come i grafici suggeriscono la funzione altezza f cresce con m. Specificamente, per $m \to \infty$ si ha

$$\frac{800}{9.82}\frac{m^2}{1+m^2} \to \frac{800}{9.82} \approx 81.466$$

Il massimo do g invece si ha per $m = 1$, cioè per un angolo $\varphi = \pi/4$ dove

$$g\,(1) = \frac{3200}{9.82}\frac{1}{2} \approx 162.932$$

■

2.6.2 Funzione Esponenziale. Crescita ed Interesse

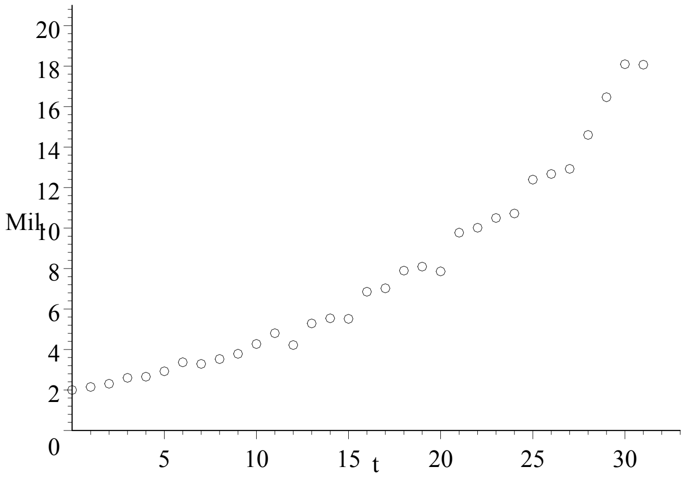
Problema 48 ***Gabriella*** *è nata l'11 Agosto 1991. Suo* ***nonno****, vuole che da grande ella possa andare al Bryn Mawr College. Decide allora di depositare in banca una cifra vincolata, a nome di Gabriella, in modo che ella possa avere i soldi per pagarsi almeno il primo anno di tasse di iscrizione, il 1° Settembre 2010.*
Il ***Nonno*** *vuole depositare i soldi in banca adesso, entro il* ***1° Settembre 1991****.*
*In banca trova dei Buoni del tesoro della durata di 19 anni all'interesse dell'****8%.***
Il problema è: ***quanto depositare sapendo che il costo delle tasse nel 1991 è di 18.000.000?***

Soluzione. La questione cruciale è quella di capire quale può essere il costo del Bryn Mawr College nel 2010.

E' chiaro che l'unica possibilità concreta è quello di stimarlo con i dati in possesso.

Egli si informa sul costo negli anni passati. Nel 1961 esso era di 2.000.000 ed è andato a crescere fino ai 18.000.000 attuali.

Ponendo $t = 0$ al 1960 il grafico dell'aumento dei costi è



Tasse a Bryn Mawr

Che tipo di curva può rappresentare questi dati?

La crescita sembra di tipo esponenziale.

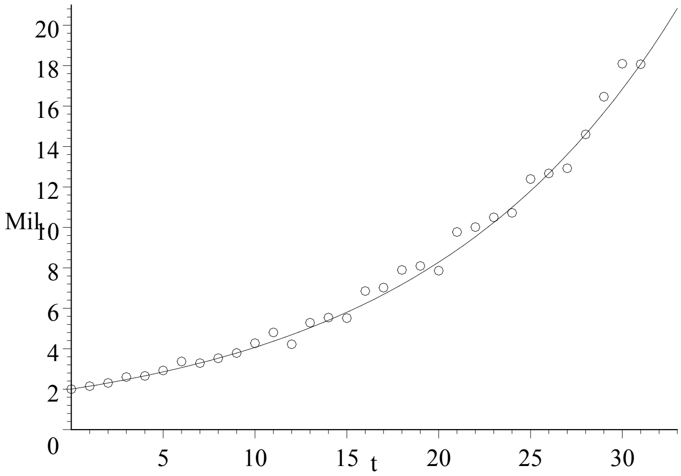
Proviamo a vedere se una funzione del tipo

$$f(t) = A\,e^{Bt}$$

riesce a rappresentare l'andamento descritto dal grafico

Sapendo che per $t = 0 \Longrightarrow f(0) = 2$ e che per $t = 31 \Longrightarrow f(31) = 18$ si ottiene la curva

$$f(t) = 2\,e^{0.071t}$$



Tasse a Bryn Mawr

Il grafico di $f(t)$ interpreta bene i dati dell'aumento del costo delle tasse; ci si può allora aspettare che nel 2010 il costo delle tasse sia

$$\textbf{Costo Tasse nel 2010} = f(50) = 2e^{0.071\cdot 50} \approx 69.62\,.$$

Arrotondiamo a 70. **Quanto bisogna depositare in banca?**

L'interesse dell'8% significa che ogni 1° Settembre i soldi versati sul conto di Gabriella verranno moltiplicati per 1.08.

Usando il linguaggio della MATEMATICA possiamo dire.

Sia $P(0)$ il deposito iniziale, nel tempo si ha

$$\begin{aligned} P(1) &= P(0)\cdot 1.08 \\ P(2) &= P(1)\cdot 1.08 = P(0)\cdot 1.08^2 \\ P(3) &= P(2)\cdot 1.08 = P(1)\cdot 1.08^2 = P(0)\cdot 1.08^3 \\ &\vdots \\ P(t) &= P(t-1)\cdot 1.08 = \cdots = P(0)\cdot 1.08^t \end{aligned}$$

Ciò che si vuole è che sia $P(19) = P(0)\cdot 1.08^{19} = 70$ da cui

$$P(0) = \frac{70}{1.08^{19}} \approx 16.219$$

■