Esercizio 1430

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnate le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix},$$

determinare A^T, B^T, $A^T + B^T$, $A + B$, $(A + B)^T$

***

Soluzione
Le matrici trasposte sono:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
$$B^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$$

La somma delle trasposte:

$$A^T + B^T = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

La somma delle matrici:

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

La trasposta della somma:

$$(A + B)^T = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 9 & 10 \end{pmatrix},$$

risultando:

$$A^T + B^T = (A + B)^T$$

Esercizio 1431

Se A e B sono due matrici $m \times n$, dimostrare la seguente proprietà:

$$A^T + B^T = (A + B)^T,$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} i = 1, ..., m \\ j = 1, ..., n \end{array}$$

La somma è data da:

$$A + B = (c_{ij}),$$

essendo:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Per definizione di matrice trasposta:

$$(A + B)^T = \left(c'_{ij}\right),$$

essendo:

$$c'_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$$

Le matrici trasposte di A e B sono rispettivamente:

$$A^T = (a_{ji}), \quad B^T = (b_{ji})$$

Eseguendo la somma:

$$A^T + B^T = \left(c''_{ij}\right),$$

essendo:

$$c''_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = c'_{ij},$$

per cui:

$$A^T + B^T = (A + B)^T$$

Esercizio 1432

Calcolare l'inversa della matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

***

Soluzione
L'inversa è:

$$A^{-1} = \frac{A^{(a)}}{\det A},$$

essendo $A^{(a)}$ la matrice aggiunta (cioè la trasposta dei complementi algebrici):

$$A^{(a)} = \begin{pmatrix} 19 & 5 & 2 \\ -24 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Quindi l'inversa:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{19}{43} & \frac{5}{43} & \frac{2}{43} \\ -\frac{24}{43} & \frac{5}{43} & \frac{2}{43} \\ \frac{2}{43} & -\frac{4}{43} & \frac{7}{43} \end{pmatrix},$$

in quanto è:

$$\det A = 43$$

Esercizio 1433

Determinare i valori del parametro a, affinché la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sia idempotente.

***

Soluzione
Ricordiamo che una matrice quadrata è idempotente se e solo se: $A^2 = A$. Nel caso in esame:

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:

$$A^2 = A \Longleftrightarrow a = 0$$

Esercizio 1434

Verificare che le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix},$$

per ogni $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

***

Soluzione
Procediamo per calcolo diretto:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Quindi:

$$AB = BA$$

Esercizio 1435

Date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

verificare la proprietà distributiva della moltiplicazione righe per colonne rispetto all'addizione di matrici:

$$A(B+C) = AB + AC \tag{3}$$

Soluzione

$$B + C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 4 & 5 & 7 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A(B+C)=\begin{pmatrix} 6 & 16 & 0 \\ 41 & -4 & 32 \\ 6 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 1436

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnate le matrici:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix},$$
$$B=\begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

verificare che A è hermitiana, e B antihermitiana.
Soluzione
Abbiamo:

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2-3i \\ 1+i & 2 & i \\ 2+3i & -i & 0 \end{pmatrix}$$
$$(A^{*})^{T}=\begin{pmatrix} 1 & 1+i & 2+3i \\ 1-i & 2 & -i \\ 2-3i & i & 0 \end{pmatrix}=A$$
$$(B^{*})^{T}=\begin{pmatrix} i & 1+i & 2-3i \\ -1+i & 2i & 1 \\ -2-3i & -1 & 0 \end{pmatrix}=-B$$

Esercizio 1437

Assegnata la matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 12 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

Determinare il minore complementare e il complemento algebrico del minore del terzo ordine $a_{145,135}$.
Soluzione

Abbiamo:

$$a_{145,135}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 16 & 18 & 20 \\ 21 & 23 & 25 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Il minore complementare di (4) è il minore del second'ordine:

$$a_{23,24}=\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 12 & 4 \end{vmatrix}=-10$$

Il complemento algebrico:

$$a'_{145,135}=(-1)^{1+4+5+1+3+5}\,a_{23,24}=-a_{23,24}$$

Esercizio 1438

Calcolare il determinante di ordine n:

$$\Delta(n)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad n=2,3,4,...,+\infty \tag{5}$$

***

Soluzione
Il calcolo diretto di $\Delta(n)$ (eq. 5) porge:

$$\Delta(2)=-1,\ \Delta(3)=-1,\ \Delta(4)=1,\ \Delta(5)=1,\ \Delta(6)=-1$$

Da ciò segue che:

$$\Delta(n)=(-1)^{k(n)},$$

essendo $k(n)$ tale che:

$$k(n)=\begin{cases} \text{dispari}, & n=2 \\ \text{dispari}, & n=3 \\ \text{pari}, & n=4 \\ \text{pari}, & n=5 \\ \text{dispari}, & n=6 \\ \text{.................} \end{cases} \tag{6}$$

La (6) implica che $k(n)$ deve essere del tipo:

$$k(n)=an^2+bn \tag{7}$$

Affinchè sia valida la (6):

$$\begin{aligned} 4a+2b&=1\\ 9a+3b&=3, \end{aligned}$$

da cui:

$$(a,b)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\Longrightarrow k(n)=\frac{n(n-1)}{2}$$

Si conclude che:

$$\Delta(n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Esercizio 1439

Assegnate le funzioni:

$$f_n(x)=\prod_{k=0}^{n-1}(x-k), \quad \text{con } n\in\mathbb{N}-\{0,1\}, \tag{8}$$

calcolare il determinante di ordine $n+1$:

$$F(n)=\begin{vmatrix} f_n(0) & f_n(1) & f_n(2) & ... & f_n(n)\\ f_n(1) & f_n(2) & f_n(3) & ... & f_n(n+1)\\ ... & ... & ... & .. & ...\\ f_n(n) & f_n(n+1) & f_n(n+2) & ... & f_n(2n) \end{vmatrix}$$

***

Soluzione
Calcoliamo direttamente $F(n)$ per $n=2,3$. La (8) è:

$$\begin{aligned} f_2(x)&=x(x-1)\\ f_3(x)&=x(x-1)(x-2) \end{aligned} \tag{9}$$

Quindi:

$$F(2)=\begin{vmatrix} f_2(0) & f_2(1) & f_2(2) \\ f_2(1) & f_2(2) & f_2(3) \\ f_2(2) & f_2(3) & f_2(4) \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix}=-8;$$
$$F(3)=\begin{vmatrix} f_3(0) & f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) \\ f_3(1) & f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) \\ f_3(2) & f_3(3) & f_3(4) & f_3(5) \\ f_3(3) & f_3(4) & f_3(5) & f_3(6) \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 24 \\ 0 & 3 & 24 & 60 \\ 3 & 24 & 60 & 120 \end{vmatrix}=1296$$

Osserviamo che:

$$(2!)^3=8$$
$$(3!)^4=1296$$

donde:

$$|F(n)|=n!^{n+1}$$

Inoltre:

$$\frac{n(n-1)}{2}=\begin{cases} 1, & n=1 \\ 2, & n=2 \end{cases}$$

Quindi:

$$F(n)=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\,n!^{n+1}$$

Esercizio 1440

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0 \\ 2x_1+0+3x_3=1 \\ 0+x_2+x_3=2 \end{cases} \tag{10}$$

***

Soluzione
La matrice dei coefficienti è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 - 2\left(-1 - 1\right) = -3 + 4 = 1 \Longrightarrow r\left(A\right) = 3,$$

quindi (10) è un sistema di Cramer.

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \det C_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -4$$
$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \det C_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$
$$C_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \det C_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

La soluzione è:

$$x_1 = -4, x_2 = -1, x_3 = 3$$

Esercizio 1441

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$$

***

Soluzione
Le matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

È facile rendersi conto che $r\left(A\right) = r\left(M\right) = 2 \equiv p$. Essendo $m = 3, n = 3$, il sistema è equivalente a:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$
$$2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2,$$

che ammette $\infty^{n-p} = \infty^1$ soluzioni. Assumiamo x_3 come parametro ($x_3 \equiv \lambda$), risolvendo poi il sistema con la regola di Cramer:

$$x_1 - x_2 = 1 - \lambda$$
$$2x_1 + 3x_2 = 2 - 2\lambda$$

La soluzione generale è:

$$\Xi^T = (1 - \lambda, 0, \lambda), \ \ \lambda \in \mathbb{R}$$

Esercizio 1442

(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Assegnati $a_k \in \mathbb{R}$ con $a_{k'} \neq a_{k''}$ $(k', k'' = 1, 2, ...n)$, risolvere l'equazione algebrica di grado $n - 1$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2 + a_3 - x & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix} = 0 \tag{11}$$

***

Soluzione
Sia $X \subset \mathbb{R}$ l'insieme delle soluzioni della (11). Per $h = 1, 2, ..., n - 1$ abbiamo:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_1 + a_2 - x & a_3 & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1} + a_n - x \end{vmatrix} = 0,$$

in quanto la prima riga è identica alla riga *h-esima*.
Per determinare altre eventuali soluzioni, esplicitiamo la (11) per diversi valori di n. Per $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 + a_2 - x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_1 (a_1 - x) = 0 \Longleftrightarrow x = a_1$$

Per $n = 2$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a_1(a_1-x)(a_2-x)=0 \Longleftrightarrow x = a_1, a_2$$

Per $n=3$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3+a_4-x \end{vmatrix}$$
$$= a_1(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)=0 \Longleftrightarrow x = a_1, a_2, a_3$$

Per $n=4$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & a_4 & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_2+a_3-x & a_5 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_3 & a_3+a_4-x \end{vmatrix}$$
$$= a_1(a_1-x)(a_2-x)(a_3-x)=0 \Longleftrightarrow x = a_1, a_2, a_3, a_4$$

Per ogni n:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_1+a_2-x & a_3 & ... & a_n \\ a_1 & a_2 & a_2+a_3-x & ... & a_n \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1}+a_n-x \end{vmatrix}$$
$$= \prod_{h=1}^{n-1} a_h(a_h-x)=0 \Longleftrightarrow x = a_h, \quad (h=1,2,...,n-1)$$

Esercizio 1443

Assegnata la matrice diagonale di ordine n:

$$A_{diag} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}, \tag{12}$$

determinare la somma dei complementi algebrici degli elementi di matrice.

***

Soluzione
La matrice complementare della (12) relativa all'elemento 11 è la matrice diagonale di ordine $n-1$:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_2 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Il complemento algebrico dell'elemento 11 è:

$$\alpha_{11} = (-1)^2 M_{11},$$

essendo:

$$M_{11} = \det A_{11} = \prod_{k=2}^{n} a_k$$

È facile rendersi conto che:

$$M_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j,$$

poiché ogni A_{ij} con $i \neq j$ ha una riga nulla. Ad esempio:

$$A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_n \end{pmatrix}$$

Inoltre:

$$A_{22} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix},$$

quindi:

$$\alpha_{22} = M_{22} = \det A_{22} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq 2}}^{n} a_k$$

Si conclude che:

$$\alpha_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j$$
$$\alpha_{ii} = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_k$$

Passando alla somma dei complementi algebrici:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} a_k$$
$$= a_2a_3...a_n + a_1a_3...a_n + ... + a_1a_2...a_{n-1}$$
$$= a_1a_2...a_n\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$

Esercizio 1444

Calcolare:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

***

Soluzione

Conviene ridurre Δ ad una forma triangolare superiore. A tale scopo, sommiamo alla seconda riga la prima moltilplicata per $-1/5$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{5} & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Sommiamo alla terza riga la seconda moltiplicata per $-5/19$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{5} & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{65}{19} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Sommiamo alla quarta riga la terza moltiplicata per $-19/65$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{5} & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{65}{19} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{211}{65} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

Sommiamo alla quinta riga la quarta moltiplicata per $-65/211$

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{19}{5} & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{65}{19} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{211}{65} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{665}{211} \end{vmatrix} \\
&= 5 \cdot \frac{19}{5} \cdot \frac{65}{19} \cdot \frac{211}{65} \cdot \frac{665}{211} \\
&= 665
\end{aligned}$$