

# Appunti complementari al Capitolo 3 di Analisi Matematica 1, di E. Giusti

24 maggio 2009

Lo spazio  $\mathbb{R}^d$  euclideo di dimensione  $d$  viene sommariamente trattato nel libro di testo nel capitolo dedicato alla topologia di  $\mathbb{R}$ . Ricordiamo che  $\mathbb{R}^d$  è lo spazio delle  $d$ -ple di numeri reali  $(x_1, \dots, x_d)$  cui possiamo dare la struttura di spazio lineare rispetto a  $\mathbb{R}$  introducendo la somma

$$(x_1, \dots, x_d) + (y_1, \dots, y_d) = (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d),$$

e il prodotto di un numero reale per una  $d$ -pla:

$$c(x_1, \dots, x_d) = (cx_1, \dots, cx_d).$$

Come nel libro di testo, chiameremo a volte vettori (ma anche punti) gli elementi di  $\mathbb{R}^d$ , ed utilizzeremo la notazione in grassetto  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$ , per indicarli. Come si sarà già notato utilizzerò la lettera  $d$  anziché  $n$  per indicare la dimensione dello spazio, essendo  $n$  utile per gli indici delle successioni.

Il libro di testo ha introdotto (pag. 83 formula [3.4]) una distanza (euclidea) in  $\mathbb{R}^d$ , definita come:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_d - y_d)^2},$$

dimostrando che la funzione della coppia  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  così definita soddisfa alle proprietà che caratterizzano una distanza

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\geq 0 \quad \text{e} \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y}). \end{aligned} \tag{1}$$

L'ultima disuguaglianza è nota come disuguaglianza triangolare.

Il libro introduce anche un'altra importante funzione che è il prodotto interno o prodotto scalare di due vettori  $\mathbf{x}$  ed  $\mathbf{y}$ , definito come

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_d y_d.$$

Si definisce allora la norma (euclidea) di  $\mathbf{x}$  come

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})},$$

da cui

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

A questo punto la disuguaglianza triangolare si può scrivere in modo equivalente come una proprietà della norma

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

A questa proprietà conviene aggiungerne un'altra, immediata, ma importante, e cioè che per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si ha

$$\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|.$$

La nozione di distanza ci permette di definire molti altri concetti, e di sviluppare una teoria che, in larga parte, può essere estesa a qualsiasi spazio sul quale sia definita una distanza che soddisfi le (1).

Possiamo ripercorrere a questo punto i contenuti del libro di testo per riconoscere che le nozioni di *intorno* di un punto, di *insieme aperto*, di *insieme chiuso*, di *punto interno*, di *punto esterno*, e di *punto di frontiera*, sono definite in qualsiasi spazio dotato di una distanza, in altre parole in qualsiasi spazio *metrico*. Si può anche dimostrare, in condizioni generali, il seguente lemma che nel libro di testo è implicito nella discussione dell'Esempio 3.4

**Lemma 1** . Sia  $I(\mathbf{x}_0, r)$  un intorno di  $\mathbf{x}_0$  di raggio  $r > 0$ , e cioè

$$I(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} : d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) < r\}.$$

Allora  $I(\mathbf{x}_0, r)$  è aperto.

**DIMOSTRAZIONE.** Dobbiamo dimostrare che, se  $\mathbf{x} \in I(\mathbf{x}_0, r)$  allora esiste un numero reale  $t > 0$ , tale che  $I(\mathbf{x}, t) \subset I(\mathbf{x}_0, r)$ . Sia  $t = r - d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) > 0$ . Se  $\mathbf{y} \in I(\mathbf{x}, t)$ , allora  $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}_0) \leq d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < t + d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r$ .

Un concetto importante, non sviluppato nel Capitolo 3 del libro di testo, è quello di successione a valori nello spazio  $\mathbb{R}^d$  o più in generale in uno spazio metrico. Una successione  $\mathbf{x}_n$  a valori in  $\mathbb{R}^d$  è una funzione definita sugli interi positivi  $\mathbb{N}$  e a valori in  $\mathbb{R}^d$ . Possiamo definire due nozioni importanti per le successioni, quella di essere "di Cauchy" e quella di essere convergente.

**Definizione 1** . Sia  $\mathbf{x}_n$  una successione in  $\mathbb{R}^d$ , si dice che  $\mathbf{x}_n$  converge ad  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  e si scrive

$$\lim_n \mathbf{x}_n = \mathbf{x},$$

se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intero positivo  $N$  tale che per ogni  $n > N$  risulta

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \varepsilon.$$

Possiamo dire che  $\mathbf{x}_n$  converge a  $\mathbf{x}$  se e solo se  $\lim_n d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) = 0$ .

La nozione di successione convergente ci consente di caratterizzare gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi in termini di successioni, secondo il risultato che segue.

**Teorema 1** . *Un insieme  $U \subset \mathbb{R}^d$  o più in generale un sottoinsieme di uno spazio metrico è aperto se e solo se ogni successione che converge ad un punto dell'insieme è definitivamente nello stesso insieme. Un insieme  $F$  è chiuso se e solo se ogni successione convergente a valori in  $F$  converge ad un punto di  $F$ .*

. Chiariamo innanzitutto che si dice che la successione  $\mathbf{x}_n$  è definitivamente in  $U$  se  $\mathbf{x}_n \in U$  eccetto che per un numero finito di indici. Supponiamo quindi che  $U$  sia aperto e che  $\mathbf{x} \in U$ . Sappiamo allora che esiste  $r > 0$  tale che  $I(\mathbf{x}, r) \subset U$ . Se  $\lim_n \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$  allora esiste un intero positivo  $N$  tale che  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) < r$  per tutti gli  $n > N$ . Ne segue che per  $n > N$ , si ha  $\mathbf{x}_n \in I(\mathbf{x}, r) \subset U$ . Viceversa supponiamo che ogni successione che converge ad un punto di  $U$  sia definitivamente in  $U$ . Vogliamo dimostrare che ogni punto di  $U$  è un punto interno. Se  $\mathbf{x} \in U$  non fosse interno allora per ogni intero positivo  $n$ , l'intorno  $I(\mathbf{x}, 1/n)$  non sarebbe contenuto in  $U$ . Pertanto questo intorno conterrebbe un elemento  $\mathbf{x}_n \notin U$ . La successione  $\mathbf{x}_n$  converge ad  $\mathbf{x}$  perché  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) < 1/n$ , ma non appartiene definitivamente ad  $U$ . Supponiamo ora che  $F$  sia chiuso e che  $\mathbf{x}_n \in F$  sia una successione convergente ad  $\mathbf{x}$ . Se  $\mathbf{x} \notin F$ , allora, poiché il complemento di  $F$  è aperto la successione  $\mathbf{x}_n$  appartiene definitivamente al complemento di  $F$ , contraddicendo l'ipotesi che  $\mathbf{x}_n \in F$  per ogni  $n$ . Viceversa se ogni successione convergente, a valori in  $F$ , converge ad un punto di  $F$ , allora  $F$  contiene tutti i suoi punti di frontiera, in quanto un punto di frontiera può essere approssimato da una successione di punti di  $F$ . Questo significa che i punti non appartenenti ad  $F$  sono esterni, e cioè che il complemento di  $F$  è aperto.

La prossima definizione richiama un concetto ben noto per  $\mathbb{R}$ .

**Definizione 2** *Una successione  $\mathbf{x}_n$  in  $\mathbb{R}^d$  si dice di Cauchy se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un intero positivo  $N$  tale che se  $n, m > N$ , allora*

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) < \varepsilon.$$

**Esercizio 1** . *Dimostrare che ogni successione convergente è di Cauchy.*

Come nel caso delle successioni di numeri reali, anche in questo contesto più generale possiamo parlare di sottosuccessioni o successioni estratte da una successione  $\mathbf{x}_n$ . Una sottosuccessione è determinata da una funzione crescente definita sugli interi positivi e a valori negli stessi interi:  $k \mapsto n_k$ , che dà luogo, per composizione, alla funzione  $k \mapsto \mathbf{x}_{n_k}$ , che si chiama appunto successione estratta o sottosuccessione. Vale anche in questo caso la proprietà delle successioni di Cauchy enunciata nell'esercizio che segue.

**Esercizio 2** *Se  $\mathbf{x}_n$  è una successione di Cauchy che ammette una successione estratta convergente a  $\mathbf{x}$ , allora la successione stessa  $\mathbf{x}_n$  converge ad  $\mathbf{x}$ .*

Le nozioni di successione convergente e successione di Cauchy valgono anche per spazi metrici generali. Nel caso di  $\mathbb{R}^d$ , possiamo però dimostrare che ogni successione di Cauchy è convergente. Questo teorema non vale in generale per gli spazi metrici, esistono infatti spazi metrici in cui non tutte le successioni di Cauchy convergono. Cominciamo con un lemma che può applicarsi solo a  $\mathbb{R}^d$ .

**Lemma 2** . *Sia  $\mathbf{x}_n$  una successione in  $\mathbb{R}^d$ , e sia  $x_n^k$  la  $k$ -esima componente del vettore  $\mathbf{x}_n$ , per  $k = 1, \dots, d$ . Allora  $\mathbf{x}_n$  converge ad  $\mathbf{x}$  se e solo se per ogni  $k = 1, \dots, d$ , la successione  $x_n^k$  converge alla componente  $k$ -esima di  $\mathbf{x}$ , cioè  $\lim_n x_n^k = x^k$  dove  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d)$ .*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x})^2 = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^d (x_n^k - x^k)^2.$$

Pertanto  $d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) \rightarrow 0$  se e solo, se per ogni  $k$ ,  $|x_n^k - x^k| \rightarrow 0$ .

**Corollario 2** *Ogni successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^d$  converge.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathbf{x}_n = (x_n^1, \dots, x_n^d)$  una successione di Cauchy. Allora per ogni  $k = 1, \dots, d$  si ha

$$|x_n^k - x_m^k| \leq \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|.$$

Pertanto sono di Cauchy le  $d$  successioni reali  $x_n^k$ . Poichè ogni successione di Cauchy reale converge esistono i limiti  $\lim_n x_n^k = x^k$ . Se  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d)$ , il lemma precedente implica che  $\lim_n \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ .

C'è un'altra proprietà importante che  $\mathbb{R}^d$  eredita, per così dire, da  $\mathbb{R}$  e cioè il fatto che ogni successione limitata ha una sottosuccessione convergente. Partiamo intanto dalla definizione di limitato.

**Definizione 3** . Un sottoinsieme  $E \subset \mathbb{R}^d$  si dice limitato se esiste un numero reale positivo  $M$  tale che per ogni  $\mathbf{x} \in E$  risulti  $\|\mathbf{x}\| \leq M$ . Una successione  $\mathbf{x}_n$  si dice limitata se esiste un numero positivo  $M$  tale che, per ogni intero positivo  $n$  risulti  $\|\mathbf{x}_n\| \leq M$ . Analogamente un sottoinsieme di uno spazio metrico si dice limitato se è contenuto in un intorno  $I(\mathbf{x}_0, r)$  di un punto dello spazio, ed una successione si dice limitata se i suoi valori appartengono ad un intorno  $I(\mathbf{x}_0, r)$  di un punto dello spazio.

**Esercizio 3** Dimostrare che se un sottoinsieme  $E$  di uno spazio metrico è contenuto nell'intorno  $I(\mathbf{x}_0, r)$  ed  $\mathbf{y}_0$  è un altro punto dello spazio, allora esiste  $r' > 0$  tale che  $E \subset I(\mathbf{y}_0, r')$ .

**Esercizio 4** Dimostrare che ogni successione di Cauchy in uno spazio metrico è limitata.

**Teorema 3** Ogni successione limitata in  $\mathbb{R}^d$  ammette una sottosuccessione convergente.

DIMOSTRAZIONE. Svolgeremo la dimostrazione per induzione su  $d$ . Osserviamo che il teorema è vero per  $d = 1$ , cioè per lo spazio dei reali (si deduce facilmente dal teorema di Bolzano- Weierstrass, oppure dall'esistenza del minimo e massimo limite). Supponiamo quindi che sia vero per  $d - 1$  con  $d > 1$ . Osserviamo che  $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$ . Questo significa che una successione  $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^d$ , può scriversi come  $\mathbf{x}_n = (\mathbf{x}_n^1, x_n^2)$ , dove  $\mathbf{x}_n^1 \in \mathbb{R}^{d-1}$  e  $x_n^2 \in \mathbb{R}$ . Poiché  $\|\mathbf{x}_n^1\| \leq \|\mathbf{x}_n\|$ , la successione  $\mathbf{x}_n^1$  è limitata in  $\mathbb{R}^{d-1}$ , pertanto per ipotesi di induzione, la successione  $\mathbf{x}_n^1$  ammette una successione estratta  $\mathbf{x}_{n_j}^1$ , convergente a  $\mathbf{x}^1$ . Ma anche la successione di numeri reali  $x_{n_j}^2$  è limitata, ed ammette quindi una sottosuccessione  $x_{n'_j}^2$ , convergente a  $x^2$ . Segue allora che la successione  $\mathbf{x}_{n'_j} = (\mathbf{x}_{n'_j}^1, x_{n'_j}^2)$  converge a  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^1, x^2)$ .

**Corollario 4** . Se  $E \subset \mathbb{R}^d$  è un insieme chiuso e limitato allora ogni successione di punti di  $E$  ammette una sottosuccessione che converge ad un punto di  $E$ . Viceversa se  $E \subset \mathbb{R}^d$  ha la proprietà che ogni successione di punti di  $E$  ammette una sottosuccessione convergente ad un punto di  $E$  allora  $E$  è chiuso e limitato.

DIMOSTRAZIONE. Poiché  $E$  è limitato ogni successione di punti di  $E$  è limitata. Pertanto una successione di punti di  $E$  ammette una sottosuccessione convergente. Poiché  $E$  è chiuso la sottosuccessione convergente convergerà per il Teorema 1 ad un punto di  $E$ . Viceversa supponiamo che ogni successione di punti di  $E$  ammetta una sottosuccessione convergente ad un punto di

$E$ . Se  $E$  non fosse limitato esisterebbero punti  $\mathbf{x}_n \in E$ , tali che  $\|\mathbf{x}_n\| \geq n$ . La successione  $\mathbf{x}_n$  non può ammettere una sottosuccessione convergente. Supponiamo che  $E$  non sia chiuso, allora, per il Teorema 1, esiste una successione  $\mathbf{x}_n \in E$  che converge, ma non converge ad un punto di  $E$ . Nessuna sottosuccessione potrà allora convergere ad un punto di  $E$ , un assurdo che dimostra la tesi.

Il precedente teorema ed il suo corollario sono così importanti da meritare una definizione.

**Definizione 4** *Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^d$  o in generale di uno spazio metrico, si dice compatto se ogni successione di punti appartenenti all'insieme ammette una sottosuccessione convergente ad un punto dell'insieme.*

Secondo quest'ultima definizione il Corollario che precede dimostra che i sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^d$  sono esattamente i sottoinsiemi chiusi e limitati. Questo, naturalmente, non è vero in per tutti gli spazi metrici. L'identificazione degli insiemi compatti in uno spazio metrico è in generale un risultato preliminare molto importante, in special modo quando lo spazio metrico, come in alcuni degli esempi che vedremo è costituito da funzioni.

Le due proprietà che abbiamo verificato in  $\mathbb{R}^d$  e cioè che ogni successione di cauchy converge e ogni successione limitata ammette una sottosuccessione convergente non sono indipendenti. La seconda implica la prima. In altre parole se in uno spazio metrico tutte le successioni limitate ammettono una sottosuccessione convergente, allora ogni successione di Cauchy deve necessariamente convergere, come si deduce dal fatto che le successioni di Cauchy sono limitate e convergono quando converge una loro sottosuccessione.

Prima di passare ad esaminare altri esempi di spazi metrici vogliamo introdurre per  $\mathbb{R}^d$  un altro concetto importante, che è quello di insieme connesso.

**Definizione 5** *Un sottoinsieme  $E \subset \mathbb{R}^d$  si dice connesso se, non è vuoto e ogni volta che  $E \subset U \cup V$  è contenuto nell'unione di due insiemi aperti e disgiunti, risulta che l'intersezione di  $E$  con uno dei due insiemi è vuota. In altre parole  $E$  è connesso se non può avere intersezione non vuota con due insiemi aperti e disgiunti la cui unione lo contiene.*

**Esercizio 5** *Dimostrare che gli insiemi connessi di  $\mathbb{R}$  sono gli intervalli, le semirette ed  $\mathbb{R}$  stesso.*

**Esercizio 6** *Dimostrare che un insieme è connesso se dati due punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  appartenenti all'insieme vi appartengono anche tutti i punti del segmento che li congiunge e cioè i punti dell'insieme  $\{(1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} : 0 \leq t \leq 1\}$ . Gli insiemi che soddisfano a questa condizione si chiamano insiemi convessi.*

**Esercizio 7** *Dare un esempio di insieme connesso che non è convesso.*

Osserviamo che la norma euclidea che abbiamo introdotto non è l'unica "norma" in grado di fornirci una nozione di distanza, che dia luogo agli stessi insiemi aperti e agli stessi insiemi chiusi. Prima di fornire alcuni esempi precisiamo che cosa si intende per "norma" e spazio con norma o spazio normato.

**Definizione 6** . *Sia  $X$  uno spazio vettoriale rispetto al campo dei numeri reali. Una norma su  $X$  è una funzione definita su  $X$  e a valori reali non negativi:  $\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|$ , con le seguenti proprietà: i)  $\|\mathbf{x}\| = 0$  se e solo se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ; ii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ; iii)  $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$ , per ogni  $c \in \mathbb{R}$ . Uno spazio lineare dotato di norma si dice spazio normato.*

Possiamo ora osservare che sullo spazio  $\mathbb{R}^d$  possono essere definite altre norme. Ad esempio:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{k=1}^d |x_k|,$$

e

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}.$$

**Esercizio 8** *Dimostrare che le funzioni definite sopra per  $\mathbb{R}^d$ , sono norme la cui distanza associata identifica gli stessi insiemi aperti e chiusi e le stesse successioni convergenti.*

Un importante esempio di spazio normato è stato implicitamente considerato nello studio della convergenza uniforme delle successioni di funzioni. Si tratta dello spazio  $C^0(E)$  delle funzioni continue definite su un sottoinsieme chiuso e limitato  $E \subset \mathbb{R}$ . Per semplicità possiamo supporre che  $E = [0, 1]$ , così che  $C^0 = C^0([0, 1])$ . Sullo spazio  $C^0$  si può definire la norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : 0 \leq x \leq 1\} = \max |f(x)|.$$

È facile dimostrare la disuguaglianza triangolare ed osservare quindi che  $C^0$  è uno spazio metrico. Negli esercizi che seguono esamineremo alcune proprietà di questo spazio.

**Esercizio 9** . *Dimostrare che la convergenza di una successione di funzioni  $f_n$  nello spazio metrico  $C^0$  equivale alla convergenza uniforme.*

**Esercizio 10** *Dimostrare che ogni successione di Cauchy nello spazio metrico  $C^0$  converge.*

**Esercizio 11** . Sia

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x \leq 1/n \\ 2 - nx & \text{se } 1/n < x \leq 2/n \\ 0 & \text{se } 2/n < x \leq 1 \end{cases}$$

Dimostrare che  $f_n$  è una successione limitata di elementi di  $C^0$  che non ammette nessuna sottosuccessione convergente.

**Esercizio 12** Dimostrare che l'insieme  $\{f \in C^0 : \|f\| \leq 1\}$  è chiuso e limitato in  $C^0$  ma non è compatto.

In questo caso ci troviamo quindi di fronte ad uno spazio metrico in cui ogni successione di Cauchy è convergente, ma in cui esistono successioni limitate che non ammettono sottosuccessioni convergenti.

Lo stesso sarà vero per il prossimo esempio che si potrebbe chiamare spazio euclideo ad infinite dimensioni. Sembra che sia stato definito per la prima volta dal matematico D. Hilbert ed è per questo che una categoria di spazi che lo comprendono prende il nome indicato come la categoria degli spazi di Hilbert.

Useremo per questo spazio la notazione  $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ . Esso consiste di tutte le successioni  $\mathbf{x} = \{x^k\}$  che soddisfano alla condizione

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x^k|^2 < \infty.$$

Definiamo una la norma  $\|\mathbf{x}\|$  di un elemento di questo spazio come

$$\|\mathbf{x}\| = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x^k|^2 \right)^{1/2}.$$

Infine definiamo la distanza come

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Naturalmente ci resta da dimostrare che la distanza così definita soddisfa le (1). L'unica verifica non facile è quella relativa alla disuguaglianza triangolare, che si verifica dimostrando che

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Questa dimostrazione è lasciata per esercizio (guidato)

**Esercizio 13** Dimostrare che se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2$  allora  $2 \sum_{k=1}^{\infty} |x^k y^k| \leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$

**Esercizio 14** Dimostrare che in  $\ell^2$  è ben definito il prodotto interno di due elementi come  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k y^k$ , e che è lineare rispetto ad  $\mathbf{x}$  e rispetto ad  $\mathbf{y}$ .

**Esercizio 15** Dimostrare che  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 \leq (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2$ .

Per dimostrare che nello spazio  $\ell^2$  ogni successione di Cauchy converge, faremo uso di un lemma sugli spazi normati che ci permette di dimostrare un analogo risultato in molti contesti diversi. Prmettiamo una definizione.

**Definizione 7** . Sia  $\mathbf{x}_n$  una successione in uno spazio normato, si dice allora che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{x}_n$$

converge se converge la successione  $\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k$ . Si dice poi che la stessa serie converge assolutamente se converge la serie numerica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\|.$$

A priori non c'è nessuna ragione di credere che la convergenza assoluta della serie implichi la convergenza della serie. Si tratta infatti di convergenze in due ambiti diversi: la convergenza assoluta asserisce la convergenza di una successione di numeri non negativi, la convergenza assoluta asserisce invece la convergenza di una successione di elementi nello spazio normato. Vale però il seguente lemma.

**Lemma 3** . In uno spazio normato ogni successione di Cauchy converge se e solo se ogni serie assolutamente convergente converge.

. DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che nello spazio normato  $X$  ogni successione di Cauchy converga e supponiamo che per la successione  $\mathbf{x}_n$  valga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty.$$

Dimostriamo allora che la successione  $\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k$  è di Cauchy. Infatti

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n+p}\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \mathbf{x}_k \right\| \leq$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \|\mathbf{x}_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\|.$$

La successione numerica  $\sum_{k=n+1}^{\infty} \|\mathbf{x}_k\|$  converge per l'assoluta convergenza della serie e questo mostra che la successione  $\mathbf{s}_n$  è di Cauchy e quindi per ipotesi converge. Supponiamo ora che ogni serie assolutamente convergente converga e sia  $\mathbf{x}_n$  una successione di Cauchy. Dimosteremo che  $\mathbf{x}_n$  ammette una sottosuccessione convergente, il che implica che deve essa stessa convergere. Utilizzando la condizione di Cauchy, scegliamo  $n_1$  tale che se  $n, \geq n_1$ , risulta  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+p}\| < 1$ , e per induzione scegliamo  $n_k > n_{k-1}$  tale che se  $n \geq n_k$ , risulta  $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n+p}\| < 1/2^k$ . Allora,

$$\mathbf{x}_{n_k} = \mathbf{x}_{n_1} + \sum_{j=2}^k (\mathbf{x}_{n_j} - \mathbf{x}_{n_{j-1}}),$$

e

$$\|\mathbf{x}_{n_1}\| + \sum \|\mathbf{x}_{n_j} - \mathbf{x}_{n_{j-1}}\| < \infty.$$

Pertanto  $x_{n_k}$  è la somma parziale di una serie assolutamente convergente e quindi converge.

Torniamo ora allo spazio normato  $\ell^2$ , per dimostrare che ogni sua successione di Cauchy converge, basterà dimostrare che se  $\mathbf{x}_n$  è una successione tale che  $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathbf{x}_n\| < \infty$ , allora la successione  $\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{x}_k$  converge ad un elemento  $\mathbf{s} \in \ell^2$ . Introduciamo la notazione  $x_n^j$  per indicare la  $j$ -esima componente di  $\mathbf{x}_n$ . Osserviamo che per ogni  $j = 1, 2, \dots$ , risulta  $|x_n^j| \leq \|\mathbf{x}_n\|$ , pertanto possiamo definire  $s^j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^j$ , e porre  $\mathbf{s} = \{s^j\}$ . Dobbiamo ora dimostrare che  $\mathbf{s} \in \ell^2$  e  $\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\| \rightarrow 0$ . Sia  $\varepsilon > 0$  ed  $N$  un intero positivo tale che, per  $n \geq N$  valga  $\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n+p}\| < \varepsilon$ . Sia dunque  $n > N$ , allora, per ogni intero positivo  $M$ ,

$$\sum_{j=1}^M |s_n^j - s^j|^2 = \lim_p \sum_{j=1}^M |s_n^j - s_{n+p}^j|^2 \leq \limsup_p \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_{n+p}\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ne segue che per  $n > N$ ,

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |s_n^j - s^j|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Andiamo ora alla ricerca di una successione di elementi di  $\ell^2$  che non ha sottosuccessioni convergenti. Basta scegliere la successione  $\mathbf{e}_n$  che ha componenti tutte zero tranne la  $n$ -esima che è uguale ad uno. Si tratta ovviamente

di una successione limitata (da uno). Inoltre se  $n \neq m$ , allora  $\|\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_m\| = \sqrt{2}$ . Quest'ultima uguaglianza dimostra che nessuna sottosuccessione può essere di Cauchy e quindi può essere convergente. In particolare possiamo anche dire, ad esempio, che l'insieme  $S = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ , non è compatto (contiene una successione che non ha nessuna sottosuccessione convergente. Tuttavia è certamente limitato ed è anche chiuso (come si può dimostrare nell'esercizio che segue)

**Esercizio 16** *L'insieme  $S = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leq 1\} \subset \ell^2$  è chiuso.*