

## 8 Funzioni di variabile complessa

Un caso particolare di funzioni di due variabili indipendenti è costituita dalle funzioni di variabile complessa.

Sia  $z$  la variabile complessa  $z = x + iy$  e  $w = u + iv$  ove  $i = \sqrt{-1}$ ;  $w = f(z)$  si chiama funzione di variabile complessa, con  $w, z \in \mathbb{C}$ .

### Limite e continuità

I concetti finora utilizzati sulla continuità delle funzioni possono essere estesi anche alle funzioni di variabile complessa.

### 8.1 Derivabilità

Non sempre il calcolo della derivata di una funzione di variabile complessa porta ad un unico valore; si tratta quindi di stabilire sotto quali condizioni la derivata rispetto alla variabile  $z$  è unica.

Sia  $w = f(z)$  con  $w, z \in \mathbb{C}$ .

Vale ancora l'usuale definizione di derivata (limite del rapporto incrementale):

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (h \in \mathbb{C})$$

**Oss.** qualche volta non si è neppure in grado di calcolare la derivata: infatti basta considerare la funzione:  $w = \bar{z} = x - iy$  (la soprilineatura indica il complesso coniugato di  $z$ ).

Per calcolarla bisogna utilizzare la definizione di derivata; si ha:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{(z+h)} - \bar{z}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{h}}{h} = \begin{cases} \text{se } h \text{ è reale, si ha } f'(z) = 1 \\ \text{se } h \text{ è immaginario puro, si ha } f'(z) = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Il calcolo della derivata precedente comporta valori tra loro differenti. Si tratta quindi di stabilire sotto quali condizioni la derivata esiste ed è unica.

Illustriamo ora le condizioni che assicurano l'unicità della derivata.

Sia  $w = f(z)$  ove:  $w = u + iv$  e  $z = x + iy$ .

Sostituendo nella funzione assegnata e mettendo in evidenza la parte reale e quella immaginaria:

$$w = u + iv = f(x + iy) = g(x, y) + ik(x, y)$$

La funzione  $w = u + iv$  può essere riscritta come somma algebrica di due funzioni:  $g(x, y)$ , che ne individua la parte reale e  $k(x, y)$  che ne individua la parte immaginaria.

Calcolando le derivate parziali di  $w$  rispetto a  $x$  e  $y$ , si ricava:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = f'(z) \cdot 1 = f'(z) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = f'(z) \cdot i = if'(z) \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = f'(z) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = if'(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(z) = \frac{\partial w}{\partial x} \\ f'(z) = \frac{1}{i} \frac{\partial w}{\partial y} = -i \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = -i \frac{\partial w}{\partial y} \quad (1) \end{aligned}$$

Sapendo che valgono le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial k}{\partial x} \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} + i \frac{\partial k}{\partial y}$$

la loro sostituzione nella (1) comporta:

$$\frac{\partial g}{\partial x} + i \frac{\partial k}{\partial x} = -i \left( \frac{\partial g}{\partial y} + i \frac{\partial k}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial k}{\partial y}$$

Separando la parte reale da quella immaginaria si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial k}{\partial x} \end{cases}$$

Le relazioni precedenti sono note come le **condizioni di Cauchy-Riemann** (o di **monogeneità**) e assicurano la derivabilità di una funzione di variabile complessa.

La funzione esaminata prima  $f(z) = \bar{z}$  non soddisfa le condizioni di Cauchy-Riemann, infatti:

$$f(x + iy) = x - iy \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re}(f) = g(x, y) = x \text{ e } \operatorname{Im}(f) = k(x, y) = -y$$

$$\Leftrightarrow \text{la condizione } \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y} \text{ comporta } 1 = -1, \text{ chiaramente falsa.}$$

### 8.1.1 Conseguenze delle condizioni di Cauchy-Riemann

Dalle relazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial k}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial k}{\partial x} \end{cases}$$

derivando la prima equazione rispetto ad  $x$  e la seconda rispetto a  $y$ , si ricava:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 k}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 k}{\partial y \partial x} \end{cases}$$

per il teorema di Schwartz, si ottiene:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

nota come equazione di **Laplace bidimensionale**.

Ad un analogo risultato si perviene derivando la prima equazione rispetto ad  $y$  e la seconda rispetto a  $x$ .

$$\frac{\partial^2 k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 0$$

## **8.2 Funzioni analitiche**

Una funzione  $w = f(z)$  ( $w, z \in \mathbb{C}$ ), si dice **analitica** se soddisfa alle condizioni di **Cauchy-Riemann**, che comporta che la parte reale e la parte immaginaria di  $f(z)$  siano soluzioni dell'equazione di **Laplace** nel piano.

Inoltre vale il viceversa: se si prendono due funzioni che sono soluzioni dell'equazione di **Laplace**, tali funzioni sono sempre la parte reale e la parte immaginaria di una funzione di variabile complessa (analitica).