# 4. Le Serie numeriche

Le serie sono strettamente legate alle successioni al punto che si possono considerare come una loro naturale evoluzione.
Sia $\{a_k\}$ una successione, si chiama **ridotta *k*-esima**, la quantità:

$$S_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$$

ottenuta sommando fra di loro i primi $k$ termini della successione.
Si chiama **serie infinita** la quantità:

$$\sum_{h=1}^{\infty} a_h$$

I termini della serie devono essere sempre ben definiti e possono non partire dall'indice $h = 1$.
Ad esempio, se consideriamo la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\log k} = \frac{1}{\log 1} + \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3} + \ldots$$

L'indice $k$ in questo caso deve partire dal valore 2 poiché, per $k = 1$, la quantità $\log k$ diventa uguale a 0 e in tal caso la serie non è ben definita.

Se una **serie infinita** ammette come somma un valore finito, essa si dice **convergente**, in tutti gli altri casi si dice **divergente**.

## 4.1. Successioni parziali associate alle serie

Possiamo definire tramite le ridotte le quantità:

$$S_1 = a_1 \; ; \quad ; \quad S_2 = S_1 + a_2 \quad ; \quad S_3 = S_2 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

E in generale:

$$S_k = S_{k-1} + a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1} + a_k$$

La serie $S_k$ **converge** se esiste finito $\lim_{k \to +\infty} (S_k)$.
**Oss.** La convergenza di una successione **non implica** la convergenza della serie corrispondente.

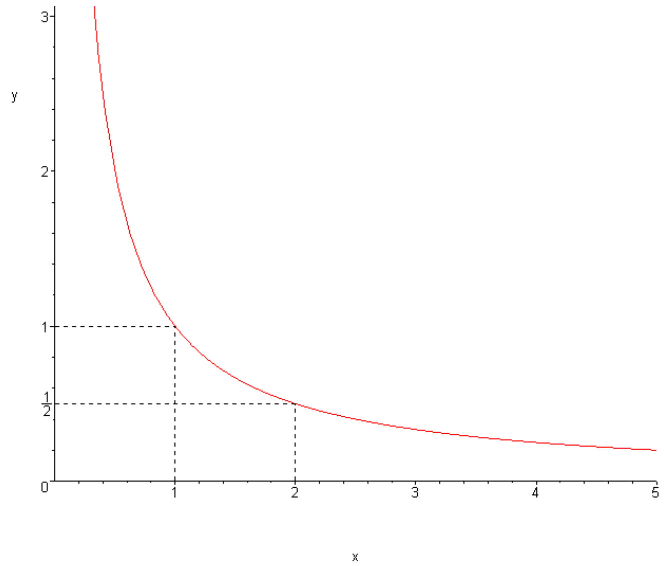
Esistono alcune serie di particolare interesse di cui vale la pena studiare il comportamento.

### 4.1.1. Serie armonica

La serie armonica è così definita:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Tale serie è divergente in quanto ad essa si può associare l'area compresa tra l'asse delle ascisse e la funzione: $\mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$: $y = \frac{1}{x}$, ossia la somma delle aree sottostanti alla funzione assegnata e l'asse delle ascisse nell'intervallo $[1, n+1]$. Si osserva che in ogni sottointervallo di ampiezza 1, la funzione assume valore massimo nel primo estremo e che l'area corrisponde alla valutazione per eccesso del seguente integrale:




$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = [\log|x|]_1^{n+1} = \log(n+1) - \log(1) = \log(n+1)$$

siccome:

$$\lim_{n \to +\infty} \log(n+1) = +\infty$$

Possiamo quindi affermare che **la serie armonica diverge**, pur convergendo la successione associata $\left\{ a_k = \frac{1}{k} \right\}$.

## 4.1.2. Perché la serie armonica si chiama "armonica"?

La **serie armonica**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$$

è così chiamata perché ogni suo termine è la media armonica del termine che lo precede e del termine che lo segue.

Dati due numeri $a$ e $b$, la loro **media armonica** $\boldsymbol{m}$ è definita in modo che la sua inversa $\frac{1}{m}$ sia la media aritmetica degli inversi di $a$ e $b$.

Prendiamo la media aritmetica degli inversi di $a$ e $b$: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{m}$ oppure $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{m}$

La media armonica può quindi essere calcolata con la formula:

$$m = \frac{2ab}{a+b}$$

Torniamo alla serie e calcoliamo i termini della successione:

- 1/2 secondo la definizione è la media armonica tra 1 e 1/3 quindi
$$m=\frac{2\cdot 1\cdot(1/3)}{1+(1/3)}=\frac{2/3}{4/3}=\frac{1}{2}$$
- 1/3 secondo la definizione è la media armonica tra 1/2 e1/4 quindi
$$m=\frac{2\cdot(1/2)\cdot(1/4)}{(1/2)+(1/4)}=\frac{1/4}{3/4}=\frac{1}{3}$$
- 1/4 secondo la definizione è la media armonica tra 1/3 e1/5 quindi
$$m=\frac{2\cdot(1/3)\cdot(1/5)}{(1/3)+(1/5)}=\frac{2/15}{8/15}=\frac{1}{4}$$

. . . e così via per tutti i termini della serie

### Curiosità storica

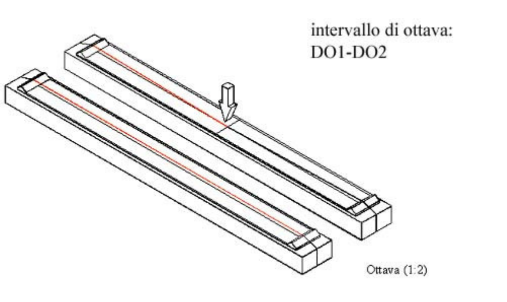
La media armonica fu scoperte dai pitagorici (circa nel 500 a.C.), più precisamente da Ippaso seguace di questa scuola. Questo tipo di media completa la terna di medie scoperte dai pitagorici:

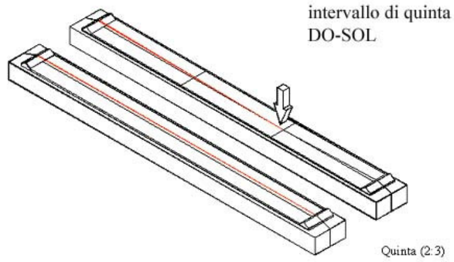
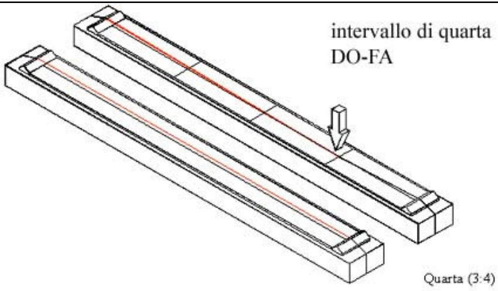
- la *media aritmetica* ⇨ dati 2 numeri $a$ e $c$ la loro media aritmetica $b$ è definita dalla relazione $a-b=b-c$ ⇨ $b=(a+c)/2$;
- la *media geometrica* ⇨ dati 2 numeri $a$ e $c$, la loro media geometrica $b$ è definita dalla proporzione $a:b=b:c$ ⇨ $b=\sqrt{ac}$ ;
- la *media armonica* ⇨ dati 2 numeri $a$ e $c$ la loro media armonica $b$ è definita dalla proporzione $(b-a)/a=(c-b)/c$ ⇨ $b=2ac/(a+c)$.

## L'esperimento di Pitagora con il monocorde

Con il termine **"armonia"** i greci intendevano l'arte di ricercare un numero "ben posizionato" (cioè un medio proporzionale) assegnati altri 2 numeri.
Si racconta che Pitagora per scoprire il concetto di armonia, fece un esperimento usando uno strumento costruito da una corda tesa fissata su una cassa risonante rettangolare chiamato monocordo.
Prima di descrivere l'esperimento bisogna definire che cos'è un intervallo consonante di suoni: un intervallo tra due note si dice **consonante** se, suonando le due note contemporaneamente, si ottiene un effetto di gradevolezza e di quiete. Si dice dissonante un intervallo che produce un senso di instabilità e di tensione.

Ecco la descrizione dell'esperimento:
Immaginiamo di avere una corda di lunghezza 1 e che questa corda suonata vuota (cioè senza premerla in nessun punto) produca la nota DO (chiamiamola nota di partenza)

| | |
|---|---|
|  | Pitagora ha interrotto la corda nel suo punto centrale e suonando questa nuova nota insieme alla nota di partenza ha scoperto che c'è un intervallo consonante tra le due. Infatti, premendo la corda nel punto centrale Pitagora ha ottenuto una nota che si trova un'ottava sopra la nota di partenza cioè ancora un DO ma più alto (pensiamo che la nota di partenza sia emessa da un uomo mentre la seconda pur essendo di uguale tonalità è emessa da una donna) |

| | |
|---|---|
|  | Pitagora ha poi interrotto la corda a 2/3 della sua lunghezza e suonando questa nuova nota insieme alla nota di partenza ha scoperto che c'è un intervallo consonante tra le due. Infatti, ha ottenuto un intervallo di quinta cioè quello formato dalla nota DO e dalla nota SOL. |
|  | Pitagora ha poi interrotto la corda a 3/4 della sua lunghezza e suonando questa nuova nota insieme alla nota di partenza ha scoperto che c'è un intervallo consonante tra le due. Infatti, ha ottenuto un intervallo di quarta cioè quello formato dalla nota DO e dalla nota FA. |

Questi rapporti rappresentano gli intervalli musicali consonanti. Tale scoperta costituì per i Pitagorici il principale argomento a favore della tesi che tutto è numero.

**Perché questo esperimento è collegato con la media armonica?**

Supponiamo che la corda che suoni la nota DO abbia lunghezza 12

Facilmente possiamo calcolare che il prossimo DO sarà a lunghezza 6 (cioè ½ di 12)

Calcoliamo la lunghezza della corda che produce la nota SOL (intervallo di quinta)

$$12 : x = 3 : 2$$

dove $x$ è la lunghezza cercata.
Si ricava $x = 8$ che tra l'altro è la media armonica tra 12 (lunghezza della corda) e 6 (lunghezza dell'ottava superiore). Verifichiamolo:

Media armonica $= \frac{2 \cdot 12 \cdot 6}{12+6} = \frac{144}{18} = 8$ (lunghezza della corda che produce il quinto grado della scala)

Calcoliamo ora la lunghezza della corda che produce la nota Fa (intervallo di quarta)
$12 : x = 4 : 3$ dove $x$ è la lunghezza cercata. Si ottiene $x = 9$ che tra l'altro è la media aritmetica tra 12 e 6.

Media aritmetica $= \frac{12+6}{2} = \frac{18}{2} = 9$ (lunghezza della corda che produce il quarto grado della scala)

La quaterna di numeri 12-9-8-6 venne chiamata "divina proporzione" e rappresentava per i Pitagorici l'armonia nella natura.
Esempio:
Un cubo ha 6 facce, 8 vertici e 12 spigoli. Perciò, secondo i Pitagorici, il cubo era un solido armonico.
Inoltre fino al basso Medioevo si utilizzò il **temperamento pitagorico** cioè si costruirono le scale musicali per successioni di quinte (quindi per successioni di medie armoniche).

**-----------------------------------------------------------------------------------------**

**Siti di riferimento e per approfondire:**
http://spazioinwind.libero.it/adolscim/lavori/seriearm.pdf
http://digilander.libero.it/initlabor/musica-simmetria/scala-pitagorica.htm
http://www.caldarelli.it/harmonices/ferrera.htm

### 4.1.3. Serie telescopica (o di Mengoli

La serie telescopica è così definita:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\ldots$$

Se decomponiamo il termine generale nel seguente modo, otteniamo:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

Scrivendo ora i primi termini della serie, si può notare che si cancellano a coppie tranne il primo e l'ultimo termine:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\frac{1}{4}\right)+\ldots=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

quindi la ridotta della serie telescopica vale:

$$S_n=1-\frac{1}{n+1}$$

da cui:

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

Possiamo quindi affermare che **la serie telescopica converge** al valore finito 1.

### 4.1.4. Serie geometrica

La serie geometrica è una serie del tipo:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a\cdot r^{k-1}=a+a\cdot r+\ a\cdot r^2+\ldots$$

dove $a$ è un numero reale non nullo (in caso contrario la serie convergerebbe al valore 0), comune a tutti i termini, che non dipende dall'indice $k$ e può essere portato fuori dall'operatore di sommatoria; ed $r$ si chiama **ragione**. La ragione si determina nel seguente modo; consideriamo:

- il termine di posto $k$: $b_k=\ a\cdot r^{k-1}$,
- il termine di posto $k-1$: $b_{k-1}=\ a\cdot r^{k-2}$,

il rapporto fra i due termini appena individuati da come risultato il valore della ragione della serie geometrica:

$$\frac{b_k}{b_{k-1}}=\frac{a\cdot r^{k-1}}{a\cdot r^{k-2}}=r^{k-1-(k-2)}=r$$

affinché una serie sia geometrica, la proprietà precedente deve valere per qualsiasi coppia di termini consecutivi costruendo ogni volta il rapporto fra **ciascun termine ed il suo immediato precedente.** Si noti che per come è costruito il rapporto l'indice $k$ deve almeno valere 2.
Cerchiamo ora di calcolare la quantità $S_n$ (ridotta $n$-esima) che vale:

$$S_n=S_{n-1}+a\cdot r^{n-1}$$

O in modo equivalente:

$$S_n = a + a \cdot r + \ a \cdot r^2 + \ldots + a \cdot r^{n-1}$$

Calcoliamo ora $r \cdot S_n$:

$$r \cdot S_n = a \cdot r + \ a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \ldots + a \cdot r^n$$

Costruendo la differenza membro a membro fra $S_n$ e $r \cdot S_n$, si ricava:

$$S_n - r \cdot S_n = a - a \cdot r^n = a\,(1 - r^n) \quad \Rightarrow \quad (1 - r)\, S_n = a\,(1 - r^n)$$

da cui si può determinare il valore di $S_n$ (la somma dei primi $n$ termini).
Se $r \neq 1$, si ha:

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{(1 - r)}$$

Mentre per $r = 1$, la serie geometrica originale diviene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot r^k = a + a + \ldots \ a = kr.$$

e se $a \neq 0$, per $k \to \infty$ , la serie **diverge**.

Studiamo, ora il limite $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a\left(1 - r^n\right)}{(1 - r)}$ se $| r | < 1$, ossia se la ragione è compresa fra $-1$ e 1, allora il limite precedente converge al valore:

$$\lim_{k \to +\infty} S_k = \frac{a}{(1 - r)}$$

*Riassumendo:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot r^{k-1} = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \quad \textbf{converge} \text{ se } a=0; \\ \dfrac{a}{(1-r)} & \Rightarrow \quad \textbf{converge} \text{ se } |r| < 1; \\ \textbf{diverge} \text{ a } +\infty & \Rightarrow \quad \text{se } r \geq 1 \text{ e } a > 0; \\ \textbf{diverge} \text{ a } -\infty & \Rightarrow \quad \text{se } r \geq 1 \text{ e } a < 0; \\ \textbf{diverge} & \Rightarrow \quad \text{se } r \leq -1. \end{cases}$$

**Esempio 1** Data la serie geometrica: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ determinare i primi termini della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$$

In questo caso il fattore comune ad ogni termine è $a = 1$.
Per calcolare la ragione $r$, prendiamo due termini consecutivi:

$$a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad \text{e} \qquad a_{k-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}$$

Si costruisce, poi, il rapporto:

$$r=\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1-(k-2)}=\frac{1}{2}$$

Il valore ottenuto vale $\frac{1}{2}$ che soddisfa alla condizione $|r| < 1$, quindi la serie è convergente e il limite di $S_n$ converge al valore $\frac{a}{(1-r)}$ che in questo esempio, essendo $a = 1$, vale:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}=2$$

**Esempio 2** Data la serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}=\pi+\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)+\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^2+\ldots=\pi-e+\frac{e^2}{\pi}-\frac{e^3}{\pi^2}+\ldots$$

Il termine comune a tutti i termini è $a = \pi$. Calcoliamo ora la ragione $r$.
Presi due termini generici consecutivi, uno di posto $k$ e uno di posto $k-1$:

$$a_k=\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{k-1} \qquad a_{k-1}=\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{k-2}.$$

Si ricava:

$$\frac{a_k}{a_{k-1}}=\frac{\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{k-1}}{\pi\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{k-2}}=\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{k-1-(k-2)}=\left(-\frac{e}{\pi}\right)^{1}=\left(-\frac{e}{\pi}\right).$$

Il valore ottenuto rappresenta la ragione e poiché: $-1<-\frac{e}{\pi}<1$, possiamo affermare che la serie è convergente e che il valore a cui la serie converge è:

$$S=\frac{\pi}{1-\left(-\frac{e}{\pi}\right)}=\frac{\pi}{\frac{\pi+e}{\pi}}=\frac{\pi^2}{\pi+e}.$$

In questo caso il problema si sposta alla valutazione approssimata di $S$ che è costruito con i due numeri trascendenti $e$ e $\pi$.

## 4.2. Convergenza delle serie

**Teorema:** Condizione **necessaria** affinché la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **converga** è che il termine generale della serie tenda a zero.
**Oss**. Se il termine generale non tende a zero, sicuramente la serie **non può convergere**.

**Esempio 3** Sia data la serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{1}+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$

Siccome il termine generale vale: $a_n=\frac{n}{2n-1}$ e poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0$, la serie **non converge**.

**Esempio 4** Sia data la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-)^n \cdot n \cdot sen\frac{1}{n}$. Il termine generale vale: $a_n = (-)^n \cdot n \cdot sen\frac{1}{n}$

Calcoliamo ora: $\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \cdot n \cdot sen\frac{1}{n}$ . Per effettuare tale calcolo si pone $n = \frac{1}{u}$.
Si osserva che:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u}.$$

Con questa posizione, si ricava:

$$\lim_{u\to 0} (-)^{\frac{1}{u}} \cdot \frac{1}{u} \cdot sen(u) = \lim_{u\to 0} (-)^{\frac{1}{u}} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{sen(u)}{u}.$$

Il limite precedente non tende a 0, ma continua ad oscillare tra i valori +1 e −1. Pertanto la serie assegnata **diverge**.

## 4.2.1. Proprietà riguardanti le serie

Consideriamo la serie: $\sum a_n$ . Questa serie converge se per un certo valore dell'indice la serie parziale (cioè calcolata dal valore dell'indice in poi) converge.

Siano: $\sum a_n = A$ e $\sum b_n = B$ due serie entrambe **convergenti**.

**Prodotto per uno scalare.** Se $c \in \mathbb{R}$, è possibile costruire la serie **prodotto per uno scalare**: $\sum c \cdot a_n$ dove $c$ non dipende dall'indice della sommatoria. Il valore della serie è:

$$\sum c \cdot a_n = c \cdot \sum a_n = c \cdot A.$$

**Somma di due serie**. Si sommano gli elementi di posto corrispondente:

$$\sum c_n = \sum (a_n + b_n).$$

Il valore della somma delle due serie vale: $\sum c_n = A + B$

**Differenza di due serie.** Si procede in modo analogo a quanto fatto per la somma:

$$\sum (a_n - b_n) = \sum a_n + (-1) \cdot \sum b_n = A - B.$$

Se per ogni $n$ si ha che $a_n \le b_n$ , allora anche $A \le B$.

**Esempio 5** Calcolare il valore della somma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+2^{k+1}}{3^k}$.

Tale serie si può spezzare nella somma delle due serie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{3^k}$.

Per calcolare il valore della serie somma di due serie studio i termini della somma separatamente:

**Prima serie:** $\sum \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ...\right).$

1. Il valore comune è: $a = \frac{1}{3}$.
2. Determiniamo se la serie può convergere: da $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$ segue che la serie può convergere.
3. Cerchiamo la ragione: $a_k = \frac{1}{3^k}$, $a_{k-1} = \frac{1}{3^{k-1}}$ ⇨ $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\frac{1}{3^k}}{\frac{1}{3^{k-1}}} = \frac{3^{k-1}}{3^k} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$. La ragione

   vale $\frac{1}{3} < 1$, pertanto la serie **converge**.
4. La somma vale: $S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

**Seconda serie:** $\sum \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \ldots = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \ldots\right)$.

1. Il valore comune è: $a = \frac{4}{3}$.
2. Determiniamo se la serie può convergere:

   $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \cdot 2^n}{3^n} = 2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3^n} = 2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ⇨ La serie può convergere.
3. Cerchiamo la ragione: $a_k = \frac{2^{k+1}}{3^k}$, $a_{k-1} = \frac{2^k}{3^{k-1}}$ ⇨ $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\frac{2^{k+1}}{3^k}}{\frac{2^k}{3^{k-1}}} = \frac{2^{k+1}}{3^k} \cdot \frac{3^{k-1}}{2^k} = \frac{2}{3}$.

   Poiché la ragione vale $\frac{2}{3} < 1$, la serie è **convergente**.
4. La somma vale: $S = \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{1} = 4$.

Pertanto la somma delle due serie vale:

$$S = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}.$$

## 4.2.2. Teorema

Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi. Identificando $a_n$ con la funzione $f(n)$ ove $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è **continua** e **non crescente** (che non vuol dire *decrescente*), nell'intervallo (1, +∞), allora:

$$\sum a_n \quad \text{e} \quad \int_1^\infty f(n)dn$$

o **convergono** entrambi oppure **divergono**.

Osservazione: Tale teorema assicura solo l'eventuale convergenza della serie ma non dice che la serie e l'integrale coincidono. Se la serie converge, è probabile che il valore coincida con l'integrale, ma ciò non è sempre vero.

### 4.2.3. *p*–serie

La funzione $f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ sia non crescente. Per la convergenza ci si appoggia al $p$-integrale.

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$$

La $p$-serie **converge** se: $p > 1$
La $p$-serie **diverge** se: $p \le 1$ (per $p = 1$ si ha la serie armonica).

**Esempio 6.** Data la serie: $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ stabilire l'eventuale convergenza.
Si confronta la serie con l'integrale improprio corrispondente:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^p}\, dx \qquad .ò$$

Posto: $u = \log x$ si ricava $du = \dfrac{dx}{x}$.
Si perviene al $p$–integrale:

$$\int_{\log 2}^{\infty} \frac{du}{u^p}$$

Se $p > 1$ il $p$–integrale **converge** e anche la $p$–serie originale **converge**.
Se $p \le 1$ il $p$–integrale **diverge** e pure la $p$–serie **diverge**.
Se $p = 0$ la serie diventa quella armonica:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^0} = \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{(serie armonica)}\,.$$

### 4.2.4. Criterio del confronto

Il criterio del confronto opera fra una serie assegnata e una serie di cui è noto il comportamento.

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni a termini positivi tali che esista una costante reale $k > 0$ per cui valga la relazione:

$$0 \le a_n \le k \cdot b_n$$

Se $\sum b_n$ **converge**, allora anche $\sum a_n$ **converge**, se $\sum a_n$ **diverge**, allora anche $\sum b_n$ **diverge**.

**Esempio 7** Stabilire l'eventuale convergenza della serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$

1. Sono soddisfatte le ipotesi del criterio del confronto quando si usa come serie di riferimento la serie geometrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$?

   Si osserva che tutti i termini della serie sono positivi e che vale la disuguaglianza:

$$0 \le \frac{1}{2^n + 1} \le \frac{1}{2^n}$$

2. Si determina la ragione della serie usata per il test. La ragione $r$ vale $\frac{1}{2}$. Quindi la serie test converge e di conseguenza converge anche la serie in questione.

**Esempio 8** Stabilire l'eventuale convergenza della serie: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$

Si verifica immediatamente che per $n \geq 2 \Rightarrow n > \log n$. Dalla disuguaglianza dei reciproci si ottiene:

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{\log n} \Rightarrow \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$$

Tutti gli elementi della serie sono positivi. Dalla relazione $\frac{1}{\log n} > \frac{1}{n}$ si può passare all'analoga relazione tra le serie corrispondenti:

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n} < \sum_{2}^{\infty}\frac{1}{\log n}$$

Poiché la serie armonica **diverge** anche la serie assegnata **diverge**.

### 4.2.5. Criterio del confronto al limite

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni a termini positivi, di cui si considerano i rispettivi elementi di egual posto $n$. Si valuta il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=L$$

- Se $L < +\infty$, cioè $L$ tende ad un valore finito, e $\sum b_n$ **converge** allora anche la serie $\sum a_n$ **converge**;
- Se $L > 0$, cioè $L$ può tendere ad infinito, e $\sum b_n$ **diverge** allora anche $\sum a_n$ **diverge**.

**Esempio 9** Stabilire l'eventuale convergenza della serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} n+1}{n^2}\right)$

Usando per il confronto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1+\operatorname{sen} n}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty}(1+\operatorname{sen} n)$$

Tale limite non esiste. Si può operare, in altro modo, ricordando che la funzione seno assume valori sempre compresi nell'intervallo $[-1,+1]$. Risulta, quindi:

$$\frac{0}{n^2} \leq \frac{\operatorname{sen} n+1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}$$

Si può sfruttare il criterio del confronto, dal momento che la quantità $\frac{2}{n^2}$ si può associare ad una 2–serie **convergente** dato che l'esponente di $n$ vale 2. Pertanto, in conseguenza della limitazione precedente,anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{sen} n+1}{n^2}\right)$ **converge**.

## 4.2.6. Criterio del rapporto

Data la serie $\sum a_n$ a termini positivi(o definitivamente positivi, ossia positivi da un certo valore dell'indice in poi), il criterio del rapporto costruisce il rapporto fra il termine di posto *n* e quello immediatamente precedente di posto *n*-1. e poi ne calcola il limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=p$$

A seconda del valore di p, si possono presentare le seguenti situazioni:

- Se $0 \le p < 1$, allora $p$ assume valore finito: la serie **converge**;
- Se $p > 1$, allora $p$ assume valore infinito e la serie **diverge**;
- Se $p = 1$, **non si può decidere nulla sulla convergenza** della serie (caso **indecidibile**).

**Esercizio 10** Stabilire l'eventuale convergenza della serie: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{99^n}{n!}$

Sicuramente tutti i termini della serie sono positivi, si può quindi utilizzare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{99^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{99^n}{n!}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\cdot\frac{99^{n+1}}{99^n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{99}{n+1}=0$$

Siccome il limite precedente esiste finito la serie data **converge**.

## 4.2.7. Criterio della radice

Data la serie $\sum a_n$ a termini positivi (oppure definitivamente positivi), il criterio della radice prevede di costruire la radice *n*-esima dell'elemento di posto *n,* e di calcolare poi il limite della quantità così ottenuta:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=h$$

A seconda del valore di *h*, si possono presentare le seguenti situazioni:

- Se $0 \le h < 1$, allora $h$ assume valore finito e la serie **converge**;
- Se $h > 1$, allora $h$ assume valore infinito e la serie **diverge**;
- Se $h = 1$, **non si può decidere nulla sulla convergenza** della serie (caso **indecidibile**).